



# Quelques réflexions sur l'identification de paramètres en dynamique des matériaux et des structures.

Pierre Argoul

## ► To cite this version:

Pierre Argoul. Quelques réflexions sur l'identification de paramètres en dynamique des matériaux et des structures.. Mécanique [physics.med-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2004. tel-00364431

**HAL Id: tel-00364431**

**<https://theses.hal.science/tel-00364431>**

Submitted on 26 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Quelques réflexions sur  
l'identification de paramètres en dynamique des  
matériaux et des structures.**

*Pierre Argoul*

**Université Claude Bernard - Lyon I**

**mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches déposé en 2003  
et défendu à Lyon le 11 Mars 2004.**

*À Jehanine, à Françoise et Hélène,  
à Bernadette,*

## Remerciements

Il me faut avant toute chose, remercier trois professeurs qui ont été des guides essentiels au cours de ma vie professionnelle : M. le Prof. Louis Jézéquel, M. le Prof. Bernard Halphen et M. le Prof. Michel Frémond. Qu'ils soient assurés de ma profonde gratitude.

Je souhaite aussi exprimer ma vive gratitude à M. le Prof. Alain Ehrlacher pour son accueil au sein du LAMI et ses encouragements répétés afin que je dépose ce manuscrit et à son successeur Karam Sab.

Un immense merci aux femmes et aux hommes qui me sont ou m'ont été chers pendant mes années de recherche.

En tout premier lieu, ma mère Jehanine, qui tout au long de sa vie, a encouragé et aidé mon travail de recherche ; elle a partagé avec le même entrain, mes états d'enthousiasme et de découragement et m'a constamment soutenu dans les moments difficiles de ma thèse de doctorat. Ce mémoire lui est dédié ; sans elle, ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Ensuite, mes deux soeurs Françoise et Hélène, ma femme Bernadette et trois hommes très proches et présents dans ma vie, mon père André et mes fils Aurélien et Jean.

Enfin, je n'oublie pas tous ceux qui de près ou de loin, ont partagé les soucis de ma recherche et qui m'ont aidé et encouragé au fil des jours. La liste est longue et je ne citerai que deux chercheurs, avec qui j'ai collaborés, M. Bruno Guillermin et Mme Nelly Point, qui ont su allier leurs qualités scientifiques à leurs qualités humaines, en restant vrais, authentiques, sincères.

Le nom de tous les autres n'est pas présent ici, par souci de brièveté, mais je suis certain qu'ils se reconnaîtront à la lecture de ces lignes.



# Sommaire

<b>1 Généralités sur les problèmes inverses et l'identification de paramètres</b>	<b>11</b>
<b>A Définition et position du problème inverse</b>	<b>11</b>
<b>B Résolution d'un problème inverse en dimension finie</b>	<b>14</b>
B.1 Cas linéaire	15
B.2 Cas non linéaire	16
<b>C Identification de paramètres en vibration inverse</b>	<b>18</b>
C.1 Problématique	19
C.2 Identification dynamique - Cas linéaire	19
C.2.1 Approche "mécanique" .....	20
C.2.2 Approche "théorie des systèmes" .....	21
C.3 Identification dynamique - Cas non linéaire - Quelques réflexions	22
C.3.1 Approche non-paramétrique par séries de Volterra ou de Wiener .....	24
C.3.2 Approche non-paramétrique par modèle NARMAX .....	26
<b>2 Les paramètres "physiques" du modèle</b>	<b>30</b>
<b>A Les équations constitutives de la mécanique - Lois de comportement</b>	<b>31</b>
A.1 Comportement élastique	33
A.2 Comportement viscoélastique linéaire	34
A.3 Comportements plastique, élasto-plastique et visco-plastique	36
<b>B Quelques modèles rhéologiques linéaires</b>	<b>39</b>
B.1 Les modèles linéaires "élémentaires"	40
B.2 Les modèles linéaires avec amortissement hystérétique et fractionnaire	40
B.3 D'autres modèles linéaires plus élaborés	45
<b>C Les équations différentielles de la dynamique</b>	<b>46</b>
C.1 Cas linéaire	48
C.1.1 Filtre linéaire .....	49
C.2 Vibrations d'oscillateurs linéaires. Application à l'isolation vibratoire	49
C.2.1 Pulsation de résonance - Pulsation propre .....	49
C.2.2 Isolation vibratoire .....	50
C.2.3 Quelques matériaux usuels pour l'isolation vibratoire .....	51
C.3 Les oscillateurs linéaires	52

C.3.1 L'oscillateur de type Kelvin-Voigt .....	52
C.3.2 L'oscillateur avec amortissement hystérétique .....	53
C.3.3 L'oscillateur de type Zener .....	54
C.3.4 le modèle de type Kelvin-Voigt fractionnaire .....	55
<b>D Quelques modèles non linéaires</b>	<b>56</b>
D.1 Les modèles d'hystérésis liés à la plasticité	56
D.2 Les modèles d'endommagement ou de dégradation des structures	59
<b>3 Représentation des signaux de mesure</b>	<b>62</b>
<b>A Représentations temporelle et fréquentielle</b>	<b>63</b>
<b>A.1 Définitions - Problématique</b>	<b>63</b>
A.1.1 Définitions et notations .....	63
A.1.2 Historique - Limitations de l'analyse de Fourier .....	64
<b>A.2 Définitions et exemples : Signaux complexe, analytique et asymptotique associés</b>	<b>65</b>
A.2.1 Signal complexe associé .....	65
A.2.2 Signal analytique associé .....	65
A.2.3 Signal asymptotique .....	66
A.2.4 Quelques exemples d'applications analytiques .....	67
<b>A.3 Réponses libres de structures mécaniques</b>	<b>68</b>
<b>B Représentations temps-fréquence</b>	<b>68</b>
<b>B.1 Présentation et définition de trois représentations temps-fréquence</b>	<b>69</b>
B.1.1 Analyse continue par gaborettes .....	69
B.1.2 Analyse continue par ondelettes .....	69
B.1.3 Transformation de Wigner-Ville .....	70
<b>B.2 Propriétés de la transformée en ondelettes continue</b>	<b>71</b>
B.2.1 Propriétés de l'ondelette mère .....	71
B.2.2 Localisation temps-fréquence .....	72
B.2.3 Propriétés énergétiques pour la transformée en ondelettes .....	73
B.2.4 Transformée en ondelettes de signaux particuliers .....	74
B.2.5 Expression de la TOC de $\frac{du(t)}{dt}$ .....	75
<b>B.3 Présentation de trois ondelettes mères 1D</b>	<b>75</b>
B.3.1 Les ondelettes de Morlet .....	75
B.3.2 Les ondelettes de Cauchy .....	76
B.3.3 Les ondelettes "exponentielles" .....	78
<b>B.4 Réflexions actuelles sur le calcul numérique de la TOC</b>	<b>79</b>
B.4.1 Effets de bord .....	79
B.4.2 Calcul numérique de la TOC .....	81
<b>C Transformée en ondelette continue de réponses libres de structures en vibration</b>	<b>82</b>
<b>C.1 Transformée en ondelette continue d'un signal asymptotique</b>	<b>82</b>
<b>C.2 Transformée en ondelettes continue des vibrations libres d'un système linéaire</b>	<b>84</b>
C.2.1 Densité spectrale d'énergie .....	84
<b>D Fonctions caractéristiques de l'objet</b>	<b>85</b>
<b>D.1 Réponse impulsionnelle - Force interne</b>	<b>85</b>
D.1.1 Réponse impulsionnelle .....	85
<b>D.2 Fonction de transfert - Fonction de réponse en fréquence</b>	<b>86</b>
<b>D.3 Fonction d'analyse des singularités</b>	<b>86</b>

<b>4 Applications des techniques de modélisation et d'identification de paramètres à des cas numériques et réels</b>	<b>89</b>
<b>A Identification dynamique à partir de résultats d'essais numériques et de laboratoire</b>	<b>89</b>
A.1 Vibrations forcées d'un système MDDL linéaire	89
A.2 Vibrations forcées d'une maquette d'avion (essai Garteur)	90
A.3 Vibrations forcées d'une plaque avec frottement	91
A.4 Vibrations libres d'une poutre avec une non-linéarité locale	93
<b>B Comportement et Vulnérabilité des bâtiments courants</b>	<b>95</b>
B.1 Identification linéaire du comportement sismique de bâtiments	95
B.2 Détection, caractérisation et identification des non-linéarités	96
B.3 Modélisation du phénomène de torsion dans le comportement de bâtiments	98
B.4 Les spectres de réponse et le coefficient de comportement	101
B.5 Interaction site-ville et aléa sismique en milieu urbain	103
<b>C Dynamique des véhicules léger et lourds</b>	<b>104</b>
C.1 Modélisation du mouvement vertical d'un véhicule léger	104
C.2 Identification des paramètres d'un véhicule et de l'état de l'ouvrage par filtrage	105
C.2.1 Application au cas d'une charge mobile sur une poutre	108
C.3 Pesage en marche de véhicules lourds sur ouvrages d'art.	111
<b>5 Perspectives</b>	<b>114</b>
<b>A Identification - Problèmes inverses au LCPC</b>	<b>114</b>
<b>A.1 Opération de recherche au sein du LCPC</b>	<b>114</b>
– Difficultés pour l'identification et les problèmes inverses	115
– Difficultés pour les problèmes de contrôle	115
– Identification et problèmes inverses - Positionnement au LCPC	115
– Contrôle des structures - Positionnement au LCPC	117
<b>B Extension des notions d'analyse modale en dynamique non linéaire</b>	<b>119</b>
<b>B.1 Problématique</b>	<b>119</b>
<b>B.2 Nouveau sujet de thèse</b>	<b>120</b>
B.2.1 Contexte	121
B.2.2 Objectifs	121
B.2.3 Programme des travaux	121
<b>C Identification de modèles de structures en dynamique non linéaire</b>	<b>123</b>
<b>C.1 Problématique</b>	<b>123</b>
<b>C.2 Opération dans le cadre de la communauté européenne - FP6 -</b>	<b>123</b>
<b>C.3 Annexe</b>	<b>125</b>



## Préambule

*Avant de décrire dans le détail, la recherche scientifique que j'ai menée depuis presque une vingtaine d'années, j'ai souhaité par le biais de ce préambule, vous présenter les événements qui ont marqué son cheminement et son orientation. Je souhaite que ces quelques repères biographiques permettront au lecteur de mieux se situer dans ce qui va suivre et rendront la lecture de ce rapport plus attrayante.*

C'est en 1984, au cours de mon stage de DEA de Mécanique Appliquée à l'Ecole Centrale de Lyon, que je situe mon entrée dans le "monde de la recherche". Depuis ma scolarité à l'ENTPE, la Mécanique m'attirait et j'étais tout particulièrement intéressé par les vibrations mécaniques. Les images d'un film-vidéo montrant les vibrations de grande amplitude du tablier de pont de Tacoma sous les effets du vent sont gravées pour toujours, dans ma mémoire. Elles avaient frappé mon imagination : une excitation dynamique appropriée pouvait provoquer la ruine d'un ouvrage d'art ! De plus, le fait que la modélisation de cet ouvrage n'ait pas amené le concepteur à prévoir un tel phénomène attisait mon intérêt. Quelques mois plus tard, j'ai candidaté pour une quatrième année à l'ENTPE que j'ai obtenue en vue de me spécialiser en dynamique des solides. La participation aux cours de DEA dispensés par MM. les Professeurs Lalanne et Sidoroff a approfondi et enrichi mes connaissances sur la mécanique et la dynamique des milieux continus. M. le Prof. Jézéquel m'a proposé un sujet de stage sur la mise au point d'une technique d'identification dynamique des structures. Cette année de DEA (cours+stage) fut une année passionnante, riche d'enseignements. J'entrais dans le monde des chercheurs. Avec Louis Jézéquel, nous avons rédigé un article (mon premier article !) que nous avons soumis à la revue *Journal of Sound and Vibration* qui l'a accepté quelques temps après et publié en 1986.

J'ai effectué ensuite mon année de Service National en tant que scientifique du contingent à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille (IMFM) sous la direction conjointe de MM. Bernard Roux et de Patrick Bontoux. Ce fut une année enrichissante où les arcanes du métier de chercheur m'étaient petit à petit dévoilés. Je me familiarisais avec la vie quotidienne du chercheur scientifique. Mon travail à l'IMFM a porté sur la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides (pbs de convection) à l'aide des éléments finis et des méthodes spectrales.

J'ai en 1986, intégré le Laboratoire central des Ponts et Chaussées dans la Section Etudes des Comportements Mécaniques du Service de Mécanique dirigée à l'époque par M. le Prof. Bernard Halphen. Dès mon arrivée au LCPC, j'ai pu poursuivre et développer la recherche que j'avais débutée avec M. Jézéquel sur la modélisation et l'identification du comportement dynamique des structures à partir d'essais vibratoires sur ces structures. En particulier, M. Halphen m'a demandé de regarder les applications de ces techniques en génie parasismique.

En 1987, avec l'accord et sous la direction de M. Halphen, j'ai pu m'inscrire en thèse de doctorat à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées sur le sujet *Identification des Structures Vibrantes*. Le sujet était personnel et je fus tout au long de ce travail, libre du choix des orientations. En 1988, j'envoyais plusieurs propositions de communications et d'articles sur les résultats obtenues, qui furent toutes acceptées ! En 1990, j'ai soutenu ma thèse à l'ENPC. En septembre 1992, une partie de la section a déménagé à Champs/Marne pour former le LMSGC Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil Unité Mixte de Recherche CNRS/LCPC qui est dirigée par M. le Professeur Michel Frémond jusqu'au 07/02/2000 puis par M. Olivier Coussy jusqu'au 31/12/2000 en tant que directeur par interim.

De 1996 à la fin 2000, je suis nommé chef de la section Mécanique et Physique des Systèmes Complexes MPSC, section qui comprenait de 15 à 20 personnes (ainsi, en 1998, elle comprenait 8 chercheurs à temps plein et 2 chercheurs à mi-temps, 8 doctorants et 2 techniciens). En 1997, je suis promu Ingénieur Divisionnaire des Travaux Publics de l'Etat.

Dans le cadre de la réorganisation des laboratoires en mécanique et en génie civil de l'ENPC et du LCPC, sur le site de Champs/Marne, je suis affecté au 1er janvier 2001, au Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification LAMI, unité mixte de recherche ENPC-LCPC dont le directeur est M. Alain Ehrlacher. Le LAMI fait partie de l'Institut Navier qui est officiellement créé le 1er janvier 2001, et qui regroupe de plus le CERMES : Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols (Laboratoire commun ENPC-LCPC dont le directeur au 1er Janvier 2003 est M. Pierre Delage) et le LMSGC Laboratoire des Matériaux et Structures du Génie Civil (Unité mixte CNRS-ENPC-LCPC /UMR 113/ dont le directeur au 1er Janvier 2003 est M. Philippe Coussot).

Au sein du LAMI, je suis jusqu'à la fin 2002, responsable de l'axe Comportement Dynamique des Matériaux et des Structures. En 2003, un nouveau directeur du LAMI est nommé M. Karam Sab. Je suis actuellement au LAMI responsable du thème de recherche "Identification des matériaux et des Structures" qui s'intéresse à l'identification des paramètres et/ou des conditions aux limites dans les modèles de comportement pour les matériaux et les structures du génie civil et des transports. Ce thème de recherche comprend 5 fiches de

projet : (1) Analyse et identification modales animé par Honoré Yin, (2) Identification des élastomères à basses fréquences animé par Nelly Point, (3) Interaction entre un outil et un corps mou lors de la coupe animé par Amina Alaoui, (4) Plans d'expériences pour le génie civil animé par Richard Linder et (5) Analyse de signaux (méthode impact-echo) animé par moi-même.

Depuis la fin de ma thèse, j'ai été sollicité pour des contrats (contrats avec EDF, Renault, RVI, contrats avec la Direction des Transports Terrestres, contrats européens Capital Humain et Mobilité), des actions nationales de recherches (ACI-CATNAT).

J'ai participé et je participe à l'encadrement de **9** doctorants.

J'ai participé à l'encadrement de nombreux stagiaires français de maîtrise, d'écoles d'ingénieur, de DEA et étrangers (allemands, italiens, irlandais, américains).

Soient un total de **36** rapports : **16** rapports de stage de DEA, **3** rapports de stage d'étudiants étrangers (fin de cycle universitaire), **4** rapports de stage d'option d'étudiants de l'Ecole Polytechnique, **1** rapport de stage d'étudiant post-doctorant, **1** rapport de stage d'étudiant de maîtrise, **1** rapport de stage d'étudiant d'étudiant de 2ème année ENSPM, **2** rapports de stage d'étudiant de l'ENPC 1ère année, **8** rapports de stage d'étudiants de l'Université de Princeton.

J'ai travaillé en collaboration avec des professeurs étrangers (allemands, italiens, espagnols, syriens,...).

J'ai été sélectionné pour relire quelques articles et participer au jury de plusieurs thèses.

J'ai rédigé des publications dans des revues scientifiques ( Journal of Applied Mechanics, Journal of Sound and Vibration, Meccanica, Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, Compte-Rendu à l'Académie des Sciences, ... ). J'ai participé à de nombreux congrès ou à des conférences nationaux et internationaux avec présentation orale des résultats de ma recherche et article dans les actes des congrès ou des conférences ( 17ème Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée Grenoble 1988, 10ème Congrès français de Mécanique 1991, 10th World Conference on Earthquake Engineering 1992, ... ).

Soient au total **1** édition d'ouvrage, **2** contributions à des ouvrages, **13** articles dans des revues à comité de lecture, **45** articles dans des colloques avec actes, **26** exposés, invité dans des conférences ou séminaires, **9** rapports de contrats ou de mission.

J'ai été président de session dans **3** conférences internationales.

J'ai été le représentant pour la France avec Fabrice Thouverez dans le COST F3 Structural Dynamics (1997-2001) et responsable avec lui du groupe de travail WG3 sur l'Identification des non-linéarités.

J'ai participé à l'organisation de **4** colloques (trois internationaux et un national).

## Résumé

Ce rapport d'habilitation à diriger des recherches tente de broser à grands traits, une grande partie de mon travail de recherches et d'enseignements depuis plus d'une quinzaine années sur l'identification de paramètres en dynamique des structures et des matériaux. Il est constitué de sept chapitres dont les cinq premiers concernent ma recherche passée et à venir et dont les deux derniers précisent les enseignements effectués, les stagiaires encadrés ainsi que les références bibliographiques personnelles.

Parmi les quatre premiers chapitres traitant de ma recherche passée ou actuelle, le premier donne un aperçu sur la démarche inverse et sur l'identification de paramètres. De façon très réductrice, un problème d'identification de paramètres se ramène à inverser un opérateur mathématique reliant les paramètres inconnus aux données expérimentales. L'ensemble des paramètres intervenant dans le modèle de comportement choisi et l'ensemble des données mesurées sont déterminants pour la résolution du problème d'identification.

Le choix du modèle de comportement et de ses paramètres ainsi que le choix du type de données (données brutes, traitées, filtrées, etc) peut être regroupé sous la problématique de la représentation du problème vibratoire inverse. Cette recherche est au coeur de mon travail actuel et fait l'objet des deux chapitres suivants. Plus précisément, le second chapitre s'intéresse à la représentation du phénomène vibratoire étudié et en particulier aux paramètres du modèle de comportement et le troisième chapitre, à la représentation de l'ensemble des données de mesure.

Le quatrième chapitre présente quelques techniques d'identification que j'ai étudiées pour identifier les paramètres de comportement suivant les applications traitées.

Le cinquième chapitre ouvre quelques perspectives pour la recherche que je souhaiterai entreprendre dans l'avenir.

Finalement ce mémoire n'est pas uniquement un rapport de synthèse, encore moins un livre exhaustif sur le sur l'identification de paramètres en vibration inverse. Les questions qui m'ont préoccupé et qui me préoccupent encore sont présentes.

# Chapitre 1

## Généralités sur les problèmes inverses et l'identification de paramètres

L'identification de paramètres à partir d'essais en dynamique qui est au coeur de mon travail de recherche, relève d'une démarche inverse. Ce premier chapitre rappelle quelques notions générales importantes pour l'étude de problèmes inverses ; il est en relation directe avec les enseignements que j'ai dispensés dans le cadre du DEA Géomatériaux à l'Université de Marne-la-Vallée et aussi dans le cadre de la dernière année du cycle universitaire italien de l'Université de Trente dans le nord-est de l'Italie, et avec les exposés que j'ai donnés lors de séminaires internes ou invités et dans plusieurs universités étrangères.

Ce chapitre dans une première phase, pose les fondements de la problématique inverse. Il présente ensuite dans une approche déterministe, la résolution classique d'un problème inverse linéaire en dimension finie et donne quelques remarques pour le problème inverse non linéaire. La deuxième phase concerne l'identification de paramètres qui permet de relier un modèle mathématique théorique et une série de mesures expérimentales. Quelques méthodes d'identification de paramètres en dynamique linéaire et non linéaires sont finalement présentées.

La notation retenue ici est celle utilisée en dynamique des structures qui est le domaine d'application privilégié de ma recherche. De plus, l'étude est limitée aux problèmes en dimension finie : les observations, les questions posées et les modèles peuvent être représentés et traités de façon numérique.

### A Définition et position du problème inverse

En examinant la définition donnée par J.B. Keller sur les problèmes inverses : “Deux problèmes sont inverses l'un de l'autre si la formulation d'un problème nécessite la connaissance partielle ou complète de l'autre.” <sup>(1)</sup>, il est manifeste que le qualificatif direct ou inverse est arbitraire. Les deux problèmes sont définis mutuellement de façon récursive : la question métaphysique célèbre : “qui est la poule ? qui est l'oeuf ?” pourrait se transcrire : “quel problème est direct ? quel problème est inverse ?”. Dans certains cas, il est difficile de différencier le problème direct et le problème inverse associé. Ce sont alors des raisons historiques ou chronologiques qui permettent de trancher : le problème direct a été traité le premier et peut-être avec plus de détails ; il est généralement le problème le plus “facile” à résoudre, parce qu'il est “bien posé”. La démarche inverse est “très ancienne”, citons “l'Allégorie de la caverne” chez Platon<sup>(2)</sup> où l'homme enchaîné au mur d'une caverne cherche à reconstruire la “réalité” à partir de l'observation des ombres projetées sur le mur de la caverne, mais aussi “très récente” comme avec les outils actuels d'imagerie médicale, de haute technicité, qui résolvent des problèmes

---

<sup>1</sup>J.B. Keller, 1976, Inverse problems, American Mathematical Monthly 83, pp.107-118. La phrase énoncée est traduite de l'anglais : “Two problems are called inverse to each other if the formulation of each of them requires full or partial knowledge of the other.”

<sup>2</sup>Le mythe de la caverne est tiré du livre VII de “La République” : “Figure toi des hommes dans une demeure souterraine, en forme de caverne, ayant sur toute sa largeur une entrée ouverte à la lumière ; ces hommes sont là depuis leur enfance, les jambes et le cou enchaînés, de sorte qu'ils ne peuvent ni bouger ni voir ailleurs que devant eux, la chaîne les empêchant de tourner la tête ; la lumière leur vient d'un feu allumé sur une hauteur, au loin derrière eux ; entre le feu et les prisonniers passe une route élevée : imagine que le long de cette route est construit un petit mur, pareil aux cloisons que les montreurs de marionnettes dressent devant eux et au dessus desquelles ils font voir leurs merveilles.”

inverses complexes en temps réel. Les problèmes inverses connaissent un regain d'intérêt croissant depuis une vingtaine d'années, parce qu'on les rencontre dans de très nombreuses applications<sup>(3)</sup>.

Au cours de l'histoire de l'humanité, la connaissance scientifique a sans cesse cherché à répondre à une exigence de clarification et d'unification des phénomènes naturels pour permettre à l'homme de mieux appréhender le réel. Dans cette tentative d'organisation simplificatrice et de structuration du réel, la recherche d'un **modèle mathématique** permettant la transition entre le réel et la systématization des phénomènes constitue un maillon essentiel. Le modèle, instrument "pont", relie les deux rives : l'expérience sans laquelle la théorie devient dogme rigide et la théorie sans laquelle l'expérience se perd en errements. Le modèle mathématique pour un problème de mécanique comporte habituellement des paramètres qui peuvent être d'origine géométrique (longueur, volume, ...), d'origine mécanique (caractéristiques des matériaux constitutifs comme par exemple les composantes du tenseur d'élasticité, ...) ou thermique, ..., des conditions initiales, des conditions aux interfaces, ou qui sont sans signification physique ... Ces paramètres sont rassemblés dans un vecteur noté  $\underline{\mathbf{X}}$ .

Pour améliorer la connaissance d'un système physique et la compréhension de son fonctionnement et par le fait pour parfaire son modèle, l'**observation du système physique** est une étape incontournable. Elle consiste en une collection finie de mesures ou données expérimentales. La mesure peut être de deux types : (1) mesure des sollicitations ou entrées ou encore causes, obtenue en un ou plusieurs point(s) de la structure et regroupée dans un vecteur noté  $\underline{\mathbf{F}}$  et (2) mesure des réponses ou sorties ou encore effet, de la structure à cette sollicitation, mesurée en un ou plusieurs point(s) de la structure et regroupée dans un vecteur noté  $\underline{\mathbf{u}}_{mes}$ . De plus, la réponse du modèle aux sollicitations est notée  $\underline{\mathbf{u}}_{mod}$  (par souci de simplification, on la notera par la suite  $\underline{\mathbf{u}}$  quand il n'y aura pas d'ambiguïté).

Dans certaines situations, la mesure permet d'accéder directement à l'information utile sur le système étudié : on parle de mesure **directe**. Dans les autres situations, plus fréquentes, les informations recherchées ne sont pas directement accessibles à la mesure, mais elles sont physiquement reliées à d'autres grandeurs accessibles à la mesure : on est en situation de mesure **indirecte**. C'est le cas dans les techniques inverses : connaissant les sorties, on cherche à remonter à certaines caractéristiques, habituellement internes et échappant à la mesure directe.

Dans la théorie inverse "classique", on fait en premier lieu, l'hypothèse qu'il existe un modèle ou une théorie mathématique permettant de relier les paramètres du modèle aux données expérimentales mesurées. Lorsque l'on ne dispose pas de formulation mathématique pour l'opérateur reliant les paramètres aux données expérimentales mais d'une base d'exemples obtenus à partir d'expérience passées ou simulées, on peut employer les réseaux de neurones<sup>(4)</sup> pour la construction d'un modèle de relation entrée-sortie<sup>(5)</sup>. Dans ce qui suit, on va supposer que la formulation mathématique de cet opérateur a été établie pendant l'établissement du problème direct. Les équations de la physique permettent généralement d'exprimer la réponse du modèle  $\underline{\mathbf{u}}_{mod}$  comme une fonction implicite de  $\underline{\mathbf{F}}$  et de  $\underline{\mathbf{X}}$  :

$$\mathcal{A}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{u}}_{mod}, \underline{\mathbf{X}}) = 0 \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{A}$  désigne un opérateur mathématique.

Dans certaines situations comme la gravimétrie ou le cas d'approximations linéaires de certains problèmes ou autres, le modèle prend une forme explicite :

$$\underline{\mathbf{u}}_{mod} = \mathcal{A}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{X}}) \quad (1.2)$$

<sup>3</sup>Parmi les applications intéressées par les problèmes inverses, on peut citer de façon non exhaustive : optique, radar, calorimétrie, spectroscopie, géophysique, météorologie, océanographie, acoustique, radioastronomie, contrôle non destructif, génie biomédical, instrumentation, imagerie, génie civil et génie mécanique.

<sup>4</sup>Les réseaux de neurones sont des associations de nombreux processeurs élémentaires très simples (neurones), dont le comportement collectif remplit une fonction donnée souhaitée par l'utilisateur. Celui-ci doit procéder à l'apprentissage du réseau, c'est à dire le modifier progressivement en lui soumettant les exemples du comportement qu'il attend de lui, jusqu'à ce que son comportement soit satisfaisant. Le réseau de neurones par ses propriétés d'apprentissage et d'approximateur universel, est un outil intéressant dans l'approximation de fonctions complexes, approximation qui reste délicate dans le cadre de l'identification, car elle implique souvent l'approximation de fonctions non-linéaires. C'est pourquoi la capacité des réseaux de neurones à reproduire les fonctions non-linéaires a conduit les chercheurs à utiliser ces structures pour la représentation de systèmes multivariés dynamiques. Mais leur utilisation n'est pas simple. Pour l'identification, il faut déterminer la structure adéquate ainsi que l'algorithme d'adaptation des poids du réseau. Actuellement, deux types de structures sont utilisées : les réseaux de neurones multicouches et les réseaux récurrents.

Citons l'ouvrage de Hervé Abdi Abdi, H. (1994). *Les Réseaux de Neurones*. Grenoble : PUG. (programmes en matlab).

<sup>5</sup>On peut citer comme exemple d'utilisation classique des réseaux de neurones : le cas de réponses à des mailings, celui de variations de cours financiers, tests de qualité "pass-no pass", ou le contrôle d'un réacteur chimique ...). La fonction la plus usuelle, remplie par les réseaux de neurones est celle de classification d'un objet (image, son...).

Suivant la connaissance<sup>(6)</sup> de  $\underline{F}$ , de  $\underline{\mathcal{X}}$  ou de  $\underline{u}_{mes}$ , trois cas peuvent se présenter. Examinons en détail les différents cas :

1. Les paramètres du modèle et la sollicitation sont connus. L'étape suivante est le calcul de la réponse  $\underline{u}_{mod}$  du modèle à la sollicitation pour des paramètres du modèle fixés afin de prédire le comportement de la structure. C'est le **problème direct** qui est habituellement *bien posé* au sens de Hadamard. Les trois propositions suivantes sont vérifiées : il existe une solution (prop.1), unique (prop.2) et stable (prop.3) par rapport aux erreurs de données et de discrétisation<sup>(7)</sup>.
2. Les paramètres du modèle et les sorties sont connus mais la sollicitation est inconnue ou partiellement connue : il y a manque d'information sur la sollicitation. La recherche de l'entrée  $\underline{F}$  constitue le problème d'identification des sollicitations ou de recherche de la cause. Lorsque l'opérateur  $\mathcal{A}$  peut s'écrire sous forme explicite, on a à inverser la relation suivante :

$$\underline{u}_{mes} = \mathcal{A}_{\underline{\mathcal{X}}}(\underline{F}) \quad (1.3)$$

ce qui conduit à l'inversion de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\underline{\mathcal{X}}}$ . C'est le **problème inverse de première espèce** selon la terminologie employée par Natke<sup>(8)</sup>. Parmi les exemples célèbres de problèmes inverses de première espèce, un des plus fameux peut-être, est la découverte de la planète Neptune par Le Verrier, en 1846, à partir de calculs analytiques<sup>(9)</sup>.

3. Les sorties et les sollicitations sont connues mais certains paramètres du modèle sont inaccessibles à l'expérience et leur valeur numérique ne peut pas être connue par une mesure directe. On dispose habituellement d'informations supplémentaires à celle des sollicitations, éventuellement partielles ou incomplètes, sur les sorties mesurées  $\underline{u}_{mes}$  aux entrées  $\underline{F}$ . C'est le **problème inverse de deuxième espèce** ou identification de paramètres ; on a donc :

$$\underline{u}_{mes} = \mathcal{A}_{\underline{F}}(\underline{\mathcal{X}}) \quad (1.4)$$

ce qui revient dans une approche déterministe, à se poser la question de l'inversion de l'opérateur  $\mathcal{A}_{\underline{F}}$ .

Les deux derniers cas caractérisent la problématique des méthodes inverses : l'information recherchée est manquante ou cachée (non accessible à une mesure directe). On va traiter les données de l'expérience qui sont en général surabondantes, afin d'obtenir l'information recherchée. Lorsque l'opérateur  $\mathcal{A}_{\underline{F}}$  ou  $\mathcal{A}_{\underline{\mathcal{X}}}$  est linéaire, la relation (1.3) ou (1.4) se traduit en général, par une équation intégrale de Fredholm de première espèce qui s'exprime sous forme continue, par exemple, pour la relation (1.3) lorsque l'intervalle de temps de la mesure est  $[a, b]$ , par :

$$\underline{u}_{mes}(s) = \int_a^b \underline{k}(s, t) \underline{F}(t) dt$$

où  $\underline{k}(s, t)$  est la matrice noyau de l'opérateur.

Lorsque  $\underline{u}_{mes}$  et  $\underline{F}$  dépendent du temps, si on rajoute ensuite la propriété de causalité liée à la notion de temps, on obtient une équation intégrale de Volterra<sup>(10)</sup> de première espèce :

$$\underline{u}_{mes}(s) = \int_a^s \underline{k}(s, t) \underline{F}(t) dt$$

Finalement, la propriété de stationnarité (invariance par translation) entraîne une relation entrée-sortie sous la forme d'un produit de convolution :

$$\underline{u}_{mes}(s) = \int_a^s \underline{k}(s - t) \underline{F}(t) dt$$

<sup>6</sup>La connaissance ou la donnée d'un de ces vecteurs signifie que les composantes du vecteur sont accessibles à la mesure ; leur valeur numérique est parfaitement déterminée.

<sup>7</sup>La stabilité implique la continuité de l'opérateur  $\mathcal{A}$  vis-à-vis de perturbations sur les données du problème. Dans le cas où la solution du problème inverse existe et dépend continûment des données, l'instabilité peut encore apparaître à cause du mauvais conditionnement de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

<sup>8</sup>On peut citer comme référence de Natke :

H.G. Natke & N. Cottin 1988 Introduction to system identification fundamentals and survey dans Application of System Identification in Engineering, Courses and lectures n°296, Eds Natke Universität Hannover, Springer-Verlag.

<sup>9</sup>Le 1er juin 1846, à l'Académie des Sciences, Urbain Le Verrier déclara que la planète qui perturbe le mouvement d'Uranus existe ; il donna sa longitude au 1er janvier 1847 et l'erreur qu'il avait commise (inférieure à 10 degrés). L'astronome berlinois Johann Galle (1812-1910) confirma les prévisions de Le Verrier en découvrant expérimentalement en 1847 la planète Neptune suivant ses indications.

<sup>10</sup>On peut citer l'ouvrage de Volterra : *Equations aux dérivées partielles et théorie des fonctions*. Paris, Presses Universitaires de France, 1933.



Plaçons nous dans le cas du problème inverse de deuxième espèce. Lorsqu'on est en dimension finie (nombre fini de mesures soit  $N_m$  et de paramètres soit  $N_p$ ) et lorsque l'opérateur  $\mathcal{A}_{\underline{F}}$  est linéaire, la relation (1.4) s'exprime sous une forme matricielle :

$$\underline{u}_{mes} = \underline{\mathcal{A}}_{\underline{F}} \underline{x} \quad (1.5)$$

où  $\underline{\mathcal{A}}_{\underline{F}}$  est une matrice rectangulaire de dimension  $N_m \times N_p$ . Le problème inverse se ramène à l'inversion d'une matrice rectangulaire.

La théorie de l'inversion ou des méthodes inverses est donc un ensemble organisé de techniques mathématiques permettant de réduire les données d'un problème afin d'obtenir une information utile, pertinente sur le système physique réel étudié, à partir d'inférences tirées des observations. Le but des méthodes inverses est de reconstruire au mieux l'information manquante pour pouvoir estimer soit la valeur et la position des sollicitations soit la valeur des paramètres indéterminés.

L'analyse des problèmes inverses a mis en évidence deux considérations importantes. Premièrement, il n'est pas possible d'attaquer un problème inverse si l'on n'a pas préalablement une connaissance approfondie du problème direct, c'est-à-dire de la manière dont le système répond aux sollicitations qu'on lui impose. Deuxièmement, leur caractère *mal posé* au sens mathématique (sens de Hadamard) entraîne qu'une mesure, en tenant compte de la plage d'incertitude qui l'accompagne, peut correspondre à un grand nombre de solutions possibles, pouvant être fort éloignées les unes des autres.

Notre champ d'investigation pour les modèles est celui de la mécanique des milieux continus et plus précisément de la dynamique des structures. L'ouvrage<sup>(11)</sup> de H.D. Bui constitue une excellente introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux. Les applications des techniques d'identification proposées sont la détection non-destructive et la caractérisation de défauts internes, des inhomogénéités et hétérogénéités, l'identification des singularités en mécanique de la rupture et l'identification des paramètres physiques des matériaux.

## B Résolution d'un problème inverse en dimension finie

Pour résoudre un problème inverse, deux approches sont possibles :

- une approche que l'on peut qualifier de *déterministe* avec un sens d'explicite. Elle utilise les propriétés “physiques” du problème étudié pour définir les espaces et les normes associées. Les méthodes mathématiques qui en découlent relèvent de l'analyse fonctionnelle ; elles jouent sur le choix des espaces qui décrivent les variables (données et paramètres) et de leur topologie qui permettent de définir les écarts associés. On peut aussi introduire des contraintes globales sur les classes de solutions. Le choix des espaces et des contraintes n'est pas dicté par les mathématiques mais relève plutôt de considérations physiques. La solution du problème inverse n'existe en général pas. On redéfinit alors un nouveau problème d'inversion “régularisé” (équations normales) avec une nouvelle solution (quasi-solution, solution approchée, ...) de telle sorte que la solution “régularisée” dépende continûment des données et qu'elle tende vers la solution exacte lorsqu'un petit “paramètre” tend vers zéro (en supposant que la solution exacte existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure) (régularisation de Tikhonov). Dans cette approche, le problème est généralement abordé en dimension infinie avec les questions d'existence, d'unicité et de stabilité (qui deviennent de plus en plus complexes à résoudre pour des problèmes non linéaires) et le problème est ensuite résolu numériquement en dimension finie.
- une approche que l'on peut qualifier de *probabiliste*, fondée sur le traitement statistique des données. On considère comme aléatoires toutes les variables du problème afin de prendre en compte toutes les incertitudes du problème. Dans ce cas, le caractère fini du problème est postulé au départ (la discrétisation a déjà été faite) et on introduit une information *a priori* élaborée au travers de modèles probabilistes.

Dans ce paragraphe, on se place en dimension finie : les espaces des mesures et des paramètres notés respectivement  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$ , sont de dimension finie ( $\dim(\mathcal{M}) = N_m$  et  $\dim(\mathcal{P}) = N_p$ ). De plus, on suppose que  $N_m > N_p$  : le nombre de données est supérieur au nombre des paramètres inconnus, le problème inverse est dit *sur-déterminé*<sup>(12)</sup>. Nous présentons dans le paragraphe suivant, l'approche déterministe classique pour résoudre un problème inverse linéaire en dimension finie.

<sup>11</sup>Huy Duong Bui 1993. Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux, Edts Eyrolles, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France. H.D. Bui montre dans son ouvrage comment les principaux outils mathématiques existants en 1993 peuvent être appliqués à de nombreux problèmes inverses en mécanique des matériaux et des structures.

<sup>12</sup>Pour des modèles discrets en temps, on peut réduire l'influence du bruit sur l'estimation par moyennage sur le temps lorsque l'on est dans le cas sur-déterminé c'est-à-dire lorsque le nombre de données est largement supérieur au nombre de paramètres à estimer. La justification est principalement statistique : les termes dépendant du bruit de moyenne nulle deviennent négligeables

## B.1 Cas linéaire

Nous présentons ici la démarche classique pour résoudre un problème inverse linéaire en dimension finie. On se replace dans le cas du problème inverse de deuxième espèce donnée par la relation (1.5) c'est-à-dire lorsque l'opérateur  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  est linéaire par rapport au vecteur des paramètres  $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$ .

Un problème inverse n'a pas habituellement de solutions dans sa forme originelle ; ainsi, on trouve des solutions au problème inverse linéaire que si  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mes} \in \mathcal{Im} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  où  $\mathcal{Im} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  est l'image de l'opérateur  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$ <sup>(13)</sup>. Ce qui n'est pas habituellement réalisé pour des mesures réelles qui peuvent être imparfaites ou bruitées. On résout ensuite le problème inverse en projetant orthogonalement le vecteur mesure  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mes}$  dans l'image de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$ <sup>(14)</sup>. On obtient une nouvelle formulation fondée sur les équations normales :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^* \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^* \underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mes}$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^*$  désigne la matrice adjointe de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$ <sup>(15)</sup>. La résolution de ces équations est équivalente à la minimisation d'une fonction coût définie au sens des moindres carrés par l'écart entre les données prédites par le modèle et les données observées :

$$\mathcal{C}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) = \|\underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mes} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}} \underline{\underline{\mathbf{x}}}\|^2$$

La technique de minimisation au sens des moindres carrés<sup>(16)</sup> est à la base de la majorité des méthodes inverses et d'estimation des paramètres. Elle nous permet d'obtenir une infinité de solutions "généralisées". L'étape suivante est d'en choisir une, suivant un critère de sélection qui respecte la propriété de stabilité d'un problème bien-posé (par exemple : la quasi-solution de norme minimale (appelée encore solution de Moore-Penrose)<sup>(17)</sup> ou la quasi-solution la plus proche d'un vecteur  $\underline{\underline{\mathbf{x}}}_{ref}$  de paramètres de référence).

Lorsque la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^* \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  est inversible, alors on a directement la solution des équations normales :

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^* \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^* \underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mes}. \quad (1.6)$$

lorsqu'ils sont moyennés sur un intervalle de temps assez long. Il faut donc avoir plus de données mesurées que dans le cas idéal non bruité.

<sup>13</sup>L'image d'un opérateur  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  est l'ensemble défini par :

$$\mathcal{Im} \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \{ \underline{\underline{\mathbf{y}}} \in \mathcal{M}, \exists \underline{\underline{\mathbf{x}}} \in \mathcal{P} \mid \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{y}}} \}.$$

<sup>14</sup>à l'aide de la matrice de projection orthogonale sur  $\mathcal{Im} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  :  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^\dagger$  où  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^\dagger$  désigne le pseudo-inverse de la matrice rectangulaire  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  qui est défini par :  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^\dagger = \underline{\underline{\mathbf{V}}} \underline{\underline{\Lambda}}^\dagger \underline{\underline{\mathbf{U}}}^*$  où  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ ,  $\underline{\underline{\Lambda}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  sont des matrices intervenant dans la décomposition en valeurs singulières de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  :  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^* \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\Lambda}}$  avec  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  étant des matrices unitaires respectivement de dimension  $N_m$  et  $N_p$ .  $\underline{\underline{\Lambda}}$  est une matrice de même dimension que  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  et formée à l'aide des valeurs singulières  $\lambda_j$  ( $1 \leq j \leq N_p$ ) de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  :  $\underline{\underline{\Lambda}} =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & \lambda_{N_p} \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et la matrice pseudo inverse de } \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\Lambda}}^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{\lambda_r} & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \text{ où } r \text{ est le rang}$$

de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$ ,  $r \leq N - p$ .

<sup>15</sup> $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^* \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  est une matrice carrée d'ordre  $N_p$ , auto-adjointe, semi-définie positive. Les valeurs singulières  $\lambda_j$  ( $1 \leq j \leq N_p$ ) de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$  sont les racines carrées positives ou nulles des valeurs propres de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^* \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$ .

<sup>16</sup>Historiquement, la méthode des moindres carrés a été introduite et décrite par Karl Gauss en 1809. Gauss applique cette méthode à la recherche des orbites des corps célestes dans *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*. La méthode des moindres carrés est un ajustement basé sur la minimisation de la distance euclidienne entre le vecteur

$$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mes} \text{ et les prévisions du modèle } \underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mod} \text{ (dans notre cas : } \underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mod} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}} \underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \mathcal{C}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) = \sum_{i=1}^{N_m} \left( u_{mes_i} - \sum_{j=1}^{N_p} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}_{ij}} x_j \right)^2.$$

<sup>17</sup>En 1920, Moore généralisa la notion d'inverse ("general reciprocal" : inverse généralisé) d'une matrice pour inclure toutes sortes de matrices (par exemple les matrices rectangulaires), établit son unicité et ses principales propriétés. Pourtant, la majorité de ses travaux restèrent dans l'oubli pendant plusieurs années car ils étaient écrits avec un formalisme complexe et difficile à déchiffrer. Penrose redécouvrit l'inverse généralisé "general reciprocal" en 1955. La solution inverse de Moore Penrose vaut :  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^\dagger \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_{mes}$  où  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}^\dagger$  est le pseudo-inverse de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{F}}$ .



Le cas le plus classique est celui de la régression linéaire<sup>(18)</sup>. Cependant, la matrice carrée  $\underline{\underline{\mathbf{A}_F^* \mathbf{A}_F}}$  n'est généralement pas inversible. La démarche classique modifie une fois de plus, la formulation du problème inverse en introduisant un "petit" paramètre strictement positif  $\varepsilon$  dans les équations à résoudre :

$$\left( \underline{\underline{\mathbf{A}_F^* \mathbf{A}_F}} + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{I}_{N_p}}} \right) \underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{A}_F^* \mathbf{u}_{mes}}}$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{I}_{N_p}}}$  est la matrice identité de dimension  $N_p \times N_p$ .

On obtient une version régularisée des équations normales précédentes (1.6) et  $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon}}$  est l'approximation de Tikhonov de la solution généralisée de norme minimale<sup>(19)</sup>. Cette nouvelle formulation revient à minimiser une fonction coût augmentée :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) = \|\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}_F}} \underline{\underline{\mathbf{x}}}\|^2 + \varepsilon \|\underline{\underline{\mathbf{x}}}\|^2$$

On a rajouté un terme stabilisant qui sert à pénaliser une solution non voulue (oscillations, écart important avec une valeur de référence). C'est l'objet des techniques de régularisation de Tikhonov<sup>(20)</sup>.

La solution de Moore-Penrose dépend de  $\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}}}$  d'une façon non continue. Dans l'approximation de Tykhonov, la solution de Moore-Penrose est approchée par un vecteur  $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon}}$ , qui est fonction d'un paramètre de régularisation  $\varepsilon$  et qui dépend continûment de  $\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}}}$ . Un problème mal posé est par conséquent, approché par une famille de problèmes voisins bien posés.

Cependant, le vecteur  $\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}}}$  est une quantité mesurée ou observée. Par conséquent, elle peut être entachée d'une certaine marge d'erreurs ou d'une certaine quantité de bruit que l'on suppose pouvoir majorer par une borne  $\delta$ . On note  $\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}^{(\delta)}}}$  ce vecteur de mesures bruitées et  $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon^{(\delta)}}}$ <sup>(21)</sup> la solution régularisée calculée à partir de  $\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}^{(\delta)}}}$ .

On montre que l'écart entre  $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon^{(\delta)}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon}}$  solution régularisée calculée à partir de  $\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}}}$ , peut devenir très grand lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0<sup>(22)</sup>. C'est le dilemme classique dans l'analyse des problèmes mal-posés. Tikhonov propose alors de choisir  $\varepsilon$  *a priori* comme une fonction de  $\delta$  de telle sorte que  $\frac{\delta^2}{\varepsilon(\delta)} \rightarrow 0$  et  $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Le choix *a priori* de  $\varepsilon(\delta)$  est théoriquement satisfaisant mais un choix *a posteriori* fondé sur les calculs s'avère plus efficace en pratique. On peut citer le principe d'écart proposé par Morozov<sup>(23)</sup> qui propose de choisir  $\varepsilon(\delta)$  de telle sorte que le résidu  $\|\underline{\underline{\mathbf{A}_F}} \underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon^{(\delta)}}} - \underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}^{(\delta)}}}\|$  soit du même ordre de grandeur que le niveau d'incertitude dans les données de mesure<sup>(24)</sup>.

Dans un problème inverse, la première étape est le choix des espaces de données mesurées et des paramètres dont on recherche la valeur ; il faut donc choisir une représentation. C'est une étape importante qui m'intéresse particulièrement dans la période actuelle.

## B.2 Cas non linéaire

Lorsque l'opérateur  $\underline{\underline{\mathbf{A}_F}}$  est non-linéaire, on recherche une estimation de  $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$  ou de  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  de qui entraîne une valeur extrême d'un critère d'optimalité (minimisation de l'erreur quadratique, maximisation de la vraisemblance, ...). L'optimum ne peut être trouvé que par une méthode itérative : on part avec une estimation initiale du vecteur inconnu  $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$  ou  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ , que l'on affine à chaque étape jusqu'à ce que les composantes ne varient plus.

<sup>18</sup>Dans le cas de la régression linéaire, on a deux paramètres à identifier  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  ( $N_p = 2$ ) qui doivent vérifier :  $u_{mes_i} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 z_i$   $\forall i \in [1, N_m]$ . On obtient :

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} N_m & \sum_{i=1}^{N_m} z_i \\ \sum_{i=1}^{N_m} z_i & \sum_{i=1}^{N_m} z_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_m} u_{mes_i} \\ \sum_{i=1}^{N_m} z_i u_{mes_i} \end{bmatrix}.$$

<sup>19</sup> $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{A}_F^* \mathbf{A}_F}} + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{I}_{N_p}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}_F^* \mathbf{u}_{mes}}}$ . On montre aisément que  $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon}}$  tend vers  $\underline{\underline{\mathbf{A}_F^\dagger \mathbf{u}_{mes}}}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

<sup>20</sup>L'idée clef des techniques de régularisation de Tikhonov consiste à accepter une norme résiduelle  $\|\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}_F}} \underline{\underline{\mathbf{x}}}\|$  non nulle et en contrepartie, à "pénaliser" la solution. On a deux étapes : (1) choix de la fonctionnelle à minimiser : de façon générale, la solution est obtenue en minimisant la fonction coût :  $\mathcal{C}_g(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) = \|\underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}_F}} \underline{\underline{\mathbf{x}}}\|^2 + \varepsilon \|\underline{\underline{\mathcal{L}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}} - \underline{\underline{\mathbf{x}_{ref}}})\|^2$  où  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$  est une matrice qui le plus souvent correspond à l'opérateur dérivée première ou seconde et  $\underline{\underline{\mathbf{x}_{ref}}}$  représente une valeur de référence reliée à une information *a priori* sur la solution et (2) choix du paramètre  $\varepsilon$  dont dépend la régularisation du problème inverse. Ce choix est plutôt délicat : si on donne un poids trop important à la fonctionnelle stabilisatrice, la solution peut être beaucoup trop altérée et si le poids est faible, on se rapproche d'une solution au sens des moindres carrés.

<sup>21</sup> $\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon^{(\delta)}}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{A}_F^* \mathbf{A}_F}} + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{I}_{N_p}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}_F^* \mathbf{u}_{mes}^{(\delta)}}}$ .

<sup>22</sup> $\|\underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon^{(\delta)}}} - \underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon}}\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

<sup>23</sup>Citons la référence : V. Badeva & V. Morozov Problèmes incorrectement posés 1991, Masson, Paris.

<sup>24</sup> $\|\underline{\underline{\mathbf{A}_F}} \underline{\underline{\mathbf{x}_\varepsilon^{(\delta)}}} - \underline{\underline{\mathbf{u}_{mes}^{(\delta)}}}\| = \delta$

On peut classer les méthodes d'optimisation en deux familles : les méthodes *déterministes* et les méthodes *stochastiques*.

Les *méthodes déterministes* sont des techniques de recherche locale et donc tributaires de la topologie de la surface du critère à minimiser ou surface d'erreur. Lorsque la surface est convexe, ces méthodes sont très bien adaptées mais lorsqu'elle présente plusieurs extrema locaux, les résultats de l'identification dépendent très fortement des valeurs initiales des paramètres sur lesquelles repose le schéma itératif de recherche. Les méthodes de recherche se distinguent par l'ordre d'approximation de la fonction coût<sup>(25)</sup> : ordre 0 sans utilisation de dérivées, ordre 1 avec utilisation des dérivées premières; ordre 2 avec utilisation des dérivées secondes. Les méthodes d'ordre 1 sont appelées méthodes de descente (par exemple méthodes de gradient, méthodes de gradient conjugué). La méthode de Newton est la méthode classique des méthodes d'ordre 2; la matrice Hessienne des dérivées du second ordre de la fonction critère est calculée et doit être inversée à chaque itération (son inverse peut ne pas exister, en particulier, lorsque l'on se rapproche de l'optimum). Malgré des calculs parfois lourds, la convergence de cette méthode est rapide. La méthode de Levenberg-Marquadt est de la même famille que celle de Newton; elle recherche une approximation définie positive du Hessien de sorte que son inversion ne pose plus de problème. Ce type de procédé revient, comme nous l'avons déjà vu pour le cas linéaire, à régulariser la fonction coût.

Les *méthodes stochastiques* sont des méthodes de recherche globale et par conséquent, plus lourdes. Elles sont particulièrement adaptées lorsque la surface du critère présente un grand nombre de maxima ou de minima locaux. La recherche de l'espace multi-dimensionnel est forcément aléatoire et est "disciplinée" de diverses façons par les algorithmes. Une grande famille de ces méthodes est constituée des méthodes métaheuristiques apparues à partir des années 1980, et qui sont au moins pour partie, stochastiques<sup>(26)</sup>. On présente ensuite, brièvement, deux d'entre elles : les méthodes dites de recuit simulé et les méthodes dites génétiques. Ces algorithmes permettent de résoudre des problèmes d'"optimisation difficile" et ont une démarche imitant la nature d'une certaine façon<sup>(27)</sup> :

- les méthodes dites de recuit simulé<sup>(28)</sup> dont le principe de minimisation est emprunté à un processus métallurgique : on chauffe un morceau de métal, puis on le laisse refroidir lentement. Le refroidissement lent et régulier du métal permet aux atomes de se stabiliser peu à peu dans une position d'énergie minimale. On cherche à reproduire l'état quasi-minimal d'énergie : le "mouvement" qui permet le passage d'une configuration de la fonction coût à une configuration de coût plus faible se fait en accord avec un critère de probabilité fondé sur la fonction de Boltzmann<sup>(29)</sup>. De part son critère d'acceptance probabiliste dépendant des variations de coût et d'un paramètre de contrôle (température recuite), certains mouvements dégradant le critère sont permis, permettant ainsi à l'algorithme<sup>(30)</sup> de s'échapper du piège constitué par

<sup>25</sup>On développe la fonction coût  $\mathcal{C}(\underline{\mathbf{X}}) = \|\underline{\mathbf{u}}_{mes} - \underline{\mathbf{A}}_F \underline{\mathbf{X}}\|^2$  en séries de Taylor au voisinage du minimum  $\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{X}}_o$ . Si on se limite aux termes du second ordre en

$\underline{\Delta \mathbf{X}} = \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}}_1$ , on obtient :  $\mathcal{C}(\underline{\mathbf{X}}) = \mathcal{C}(\underline{\mathbf{X}}_1) + \underline{\mathcal{G}}^t(\underline{\mathbf{X}}_1) \underline{\Delta \mathbf{X}} + \frac{1}{2} \underline{\Delta \mathbf{X}}^t \underline{\mathcal{H}}(\underline{\mathbf{X}}_1) \underline{\Delta \mathbf{X}}$  où  $\underline{\mathcal{G}}(\underline{\mathbf{X}}_1)$  et  $\underline{\mathcal{H}}(\underline{\mathbf{X}}_1)$  sont respectivement le vecteur gradient et la matrice Hessienne de la fonction coût. La différentiation de  $\mathcal{C}(\underline{\mathbf{X}})$  conduit à :

$\underline{\mathcal{H}}(\underline{\mathbf{X}}_1) \underline{\Delta \mathbf{X}} = \underline{\mathcal{G}}(\underline{\mathbf{X}}) - \underline{\mathcal{G}}(\underline{\mathbf{X}}_1)$ .

Lorsque  $\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{X}}_o$ , on a :  $\underline{\mathcal{G}}(\underline{\mathbf{X}}_o) = \underline{\mathbf{0}}$  et la relation précédente devient :

$\underline{\mathcal{H}}(\underline{\mathbf{X}}_1) (\underline{\mathbf{X}}_o - \underline{\mathbf{X}}_1) = -\underline{\mathcal{G}}(\underline{\mathbf{X}}_1)$ . Si la matrice Hessienne est inversible, on a alors :

$\underline{\mathbf{X}}_o = \underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathcal{H}}^{-1}(\underline{\mathbf{X}}_1) \underline{\mathcal{G}}(\underline{\mathbf{X}}_1)$ . Le schéma itératif de l'algorithme de Newton est basé sur cette dernière relation; le vecteur  $\underline{\mathbf{X}}_{k+1}$  à l'étape  $(k+1)$  s'exprime à l'aide du vecteur  $\underline{\mathbf{X}}_k$  à l'étape  $(k)$  par :  $\underline{\mathbf{X}}_{k+1} = \underline{\mathbf{X}}_k - \underline{\mathcal{H}}^{-1}(\underline{\mathbf{X}}_k) \underline{\mathcal{G}}(\underline{\mathbf{X}}_k)$ . La méthode de Levenberg Marquadt suit la même démarche mais en partant de la fonction coût augmentée :

$\tilde{\mathcal{C}}(\underline{\mathbf{X}}) = \|\underline{\mathbf{u}}_{mes} - \underline{\mathbf{A}}_F \underline{\mathbf{X}}\|^2 + \varepsilon \|\underline{\mathbf{X}}\|^2$ .

La matrice Hessienne devient :  $\tilde{\mathcal{H}}(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathcal{H}}(\underline{\mathbf{X}}) + 2\varepsilon \underline{\mathbf{I}}_{N_p}$ .

<sup>26</sup>Voici quelques traits communs des méthodes métaheuristiques : elles ont une approche permettant de faire face à l'explosion combinatoire des possibilités; elles sont d'origine combinatoire : elles ne recourent pas au calcul des gradients de la fonction objectif; elles sont inspirées par des analogies : avec la physique (recuit simulé, diffusion simulée, etc.), avec la biologie (algorithmes génétiques, recherche tabou, etc.) ou avec l'éthologie qui est l'étude du comportement des animaux dans leur milieu naturel (colonies de fourmis, essaims de particules, etc.); elles peuvent guider, pour une tâche particulière; une autre méthode de recherche spécialisée et enfin elles ont comme inconvénients, des difficultés de réglage des paramètres mêmes de la méthode, et un temps de calcul élevé.

<sup>27</sup>Parmi ces méthodes, on compte la méthode du recuit simulé, les algorithmes génétiques, la méthode de recherche tabou, les algorithmes de colonies de fourmis, etc.

<sup>28</sup>Cette méthode a été proposée par des chercheurs d'IBM qui étudiaient les verres de spin. Citons l'ouvrage en français de P. Siarry & G. Dreyfus, 1988. La méthode de recuit simulé, IDSET, Paris.

<sup>29</sup>La fonction de Boltzmann est une fonction adimensionnelle, définie par :  $e^{-\frac{\Delta C}{T_{rec}}}$  où  $T_{rec}$  est la température recuite qui gère la probabilité d'acceptation du mouvement et  $\Delta C$  représente la variation de coût entre les deux configurations.

<sup>30</sup>Le fonctionnement de l'algorithme de recuit simulé est le suivant : (1) choisir un point de départ  $\underline{\mathbf{X}}$  ainsi qu'une température initiale  $T_0$  et une température minimale; (2) calculer un voisin  $\underline{\mathbf{Y}}$  de  $\underline{\mathbf{X}}$ ; (3) évaluer  $\mathcal{C}(\underline{\mathbf{Y}})$  et calculer l'écart par rapport au point d'origine :  $\Delta C = \mathcal{C}(\underline{\mathbf{Y}}) - \mathcal{C}(\underline{\mathbf{X}})$ ; (4) Si  $\Delta C < 0$ , on prend le point  $\underline{\mathbf{Y}}$  comme nouveau point de départ, s'il est positif, on peut encore accepter  $\underline{\mathbf{Y}}$  comme nouveau point de départ, mais avec une probabilité  $e^{-\frac{\Delta C}{T}}$  (qui varie en sens inverse de la température  $T$ ); (5)

la présence d'optima locaux.

- les méthodes dites génétiques<sup>(31)</sup> dont l'optimisation s'effectue au travers d'une démarche qui s'inspire de certains processus naturels d'évolution (croisements, mutations) et de sélection. Ces méthodes font appel au vocabulaire de la génétique (génotype ou chromosome, individu, gène, phénotype<sup>(32)</sup>) pour décrire un algorithme génétique (AG)<sup>(33)</sup>. Un algorithme génétique doit conduire<sup>(34)</sup>, à partir d'une population initiale, et après de nombreuses générations, à une population où les individus sont tous très "performants" ; en d'autres termes, à une solution optimale pour la fonction coût retenue<sup>(35)</sup>. On retient quatre points clés pour les AG : 1) utilisation d'un codage des paramètres, et non des paramètres eux-mêmes ; 2) travail sur une population de points, au lieu d'un point unique ; 3) utilisation des seules valeurs de la fonction coût à optimiser, et non de sa dérivée ou d'une autre connaissance auxiliaire ; 4) utilisation de fonctions de transition probabilistes, non déterministes. Le fonctionnement d'un tel algorithme ne garantit nullement la réussite : la probabilité existe qu'un pool génétique soit trop éloigné de la solution, ou, par exemple, qu'une convergence trop rapide bloque le processus d'évolution. Ces algorithmes n'en sont pas moins très performants et leur utilisation se développe dans de nombreux domaines<sup>(36)</sup>.

Ingber et al.<sup>(37)</sup> donnent une comparaison entre les méthodes par algorithmes génétiques et les méthodes de recuit simulé. Finalement, la tendance actuelle est l'émergence de méthodes "hybrides" qui s'efforcent de tirer parti des avantages spécifiques d'approches différentes en les combinant<sup>(38)</sup>.

## C Identification de paramètres en vibration inverse

Rentrons maintenant en détail dans la problématique de mon travail de recherche.

De grands codes de calcul en mécanique et en dynamique des matériaux et des structures ont été et sont de nos jours développés et validés au contact de grandes expérimentations et de réalisations industrielles. Au fur et à mesure que ces modèles visaient à représenter de plus en plus finement la réalité, un besoin d'identification des paramètres mécaniques "élémentaires" s'est fait sentir et a conduit à des programmes d'identification conséquents. L'application de ces modèles à des situations réelles se heurte souvent à des incertitudes voire des méconnaissances soit des paramètres du modèle soit des conditions initiales ou encore des conditions aux limites (souvent variables dans le temps). Ceci est plus particulièrement vrai dans le domaine non linéaire.

---

diminuer la température  $T(T =)$ , souvent par paliers et (6) répéter les étapes précédentes tant que le système n'est pas figé (par exemple que la température n'a pas atteint un seuil minimal).

<sup>31</sup>C'est au début des années 1960 que John Holland de l'Université du Michigan a commencé à s'intéresser à ce qui allait devenir les algorithmes génétiques. Holland poursuivait un double objectif : améliorer la compréhension des processus naturels d'adaptation, et concevoir des systèmes artificiels possédant des propriétés similaires aux systèmes naturels. L'originalité des travaux de Holland repose en particulier sur le fait qu'il n'a pas considéré les seules mutations comme source d'évolution mais aussi et surtout les phénomènes de croisement (crossover) : c'est en croisant les solutions potentielles existant au sein du pool génétique que l'on peut se rapprocher de l'optimum.

Citons comme référence l'ouvrage de D. Goldberg, 1994. Algorithmes génétiques, Addison-Wesley.

<sup>32</sup>*génotype* ou *chromosome* ou *individu* : correspond au codage sous forme de gènes d'une solution potentielle à un problème d'optimisation.

*gène* : un chromosome est composé de gènes. Dans le codage binaire, un gène vaut soit 0, soit 1.

*phénotype* : Chaque génotype représente une solution potentielle à un problème d'optimisation. La valeur de cette solution potentielle est appelée le phénotype.

<sup>33</sup>Les AG font partie des algorithmes évolutionnaires avec les stratégies évolutionnaires (SE) et la programmation d'évolution (PE). Ces trois types d'algorithmes sont apparus indépendamment au cours des années 1960 et sont bien adaptés à l'optimisation sur un grand nombre de variables. Une ES est conçue pour l'optimisation de variables continues et ne requiert pas de codage/décodage binaire des paramètres à étudier. Une SE inclut par construction un mécanisme de refroidissement similaire au recuit et enfin la convergence des SE est mieux mathématiquement établie que celle des AG. Un algorithme de PE est moins utilisé.

<sup>34</sup>Pour mettre en oeuvre un algorithme génétique, il est nécessaire de disposer : (1) d'un codage du vecteur des paramètres sous forme de chromosomes (par exemple codage binaire), (2) d'un moyen de créer la population initiale, (3) d'une fonction d'évaluation pour mesurer la force de chaque chromosome, (4) d'un mode de sélection des chromosomes les plus performants, (5) d'opérateurs génétiques adaptés au problème (opérateurs de croisement et de mutation), (6) de valeurs pour les paramètres de l'algorithme génétique (taille de la population, probabilités de croisement et de mutation et (7) d'un critère d'arrêt de la procédure.

<sup>35</sup>Voici un schéma d'algorithme génétique : (1) initialisation de la population, (2) évaluation des fonctions objectif, (3) calcul de l'efficacité (4) *for i=1 to maximum itérations* a) sélection aléatoire, b) sélection proportionnelle à l'efficacité, c) croisement, d) mutation, e) évaluation des fonctions objectif, f) calcul de l'efficacité *end for*.

<sup>36</sup>aussi divers que la prévision boursière, l'ordonnancement des systèmes de production ou la programmation des robots d'assemblage dans l'industrie automobile.

<sup>37</sup>Lester Ingber & Bruce Rosen, 1992. Genetic algorithm and very fast simulated reannealing : a comparison. Mathematical and Computer Modelling, Vol 16(11), pp. 87–100.

<sup>38</sup>Citons l'ouvrage suivant : Yann Collette & Patrick Siarry, 2002. Optimisation multiobjectif, Eds Eyrolles, Paris.

## C.1 Problématique

Revenons sur le sens du mot identification et ensuite sur la problématique de l'identification de paramètres en dynamique des structures qui guide et soutient ma recherche.

Au sens étymologique, l'identification est l'action de rendre identique deux termes préalablement différents ; dans notre cas l'identification désigne le processus de construction d'un modèle mathématique du comportement dynamique d'un système pour que ce modèle s'accorde à un champ expérimental. L'identification qui dépend des deux mondes théorique et expérimental, comporte deux étapes : une étape de *représentation ou caractérisation* qui consiste à fixer la forme du modèle ( par exemple poser les hypothèses sur l'opérateur de comportement ou établir la forme des équations du mouvement) reliant le vecteur des paramètres et celui des données mesurées et une étape d'*identification ou estimation des paramètres* qui consiste à trouver les valeurs numériques des coefficients qui interviennent dans le modèle. On est en possession : (1) d'un ensemble de données mesurées, (2) d'un ensemble de paramètres d'un modèle dont on recherche à estimer les valeurs et (3) d'un opérateur reliant les données aux paramètres.

Le problème de l'estimation des paramètres est essentiellement *un problème de traitement de l'information* : comment extraire les meilleures conclusions possibles de l'information incomplète qui est à notre disposition. Pour que la démarche soit la plus "efficace" (scientifiquement) possible, deux lignes conductrices sont à suivre, qui peuvent être perçues comme contradictoires :

1. prendre en compte toute l'information "pertinente" disponible.
2. se garder de supposer une information disponible alors qu'elle ne l'est pas.

La majorité des problèmes inverses est essentiellement mal posée. Les causes d'incertitude sont nombreuses : (1) erreurs de mesure sur les données, (2) incertitude sur le modèle, (3) erreurs numériques, par exemple lors de l'interpolation utilisée pour la discrétisation d'un modèle initialement continu.

Comme il a été présenté précédemment, deux approches sont ensuite possibles pour résoudre un problème d'identification de paramètres : *déterministe* ou *probabiliste*. Dans ce qui suit, on se limite à des approches déterministes.

## C.2 Identification dynamique - Cas linéaire

On peut résumer la problématique de *l'identification dynamique* que l'on peut aussi qualifier suivant les termes de Bui de "vibrations inverses", de la façon suivante :

Comment, à partir d'une expérience vibratoire sur la structure étudiée, connaître les caractéristiques du modèle de son comportement mécanique ?

Les essais vibratoires sont simples à mettre en oeuvre et les réponses vibratoires des structures et des matériaux contiennent des informations très riches sur l'état du système, qualitatives ou quantitatives. Durant la Seconde guerre mondiale, les premiers essais de vibration au sol des structures aéronautiques ont été imaginés par les ingénieurs allemands mais les techniques d'identification dynamique ont été réellement développés dans les années 1950 avec la disponibilité sur le marché d'excitateurs électrodynamiques (1949), de capteurs de vitesse (1953) et ensuite d'accéléromètres (1970). Les matrices des fonctions de réponses en fréquence (FRF) et les réponses impulsionnelles (RI) deviennent accessibles avec le développement des algorithmes de transformées de Fourier rapides (1965) et l'arrivée de micro-ordinateurs (1970). L'identification modale permet alors d'estimer les paramètres modaux (fréquences propres, taux d'amortissement modaux, formes modales) soit à partir des FRFs ou des RIs. Les techniques d'identification ont été d'abord appliquées sur des structures à comportement linéaire, et depuis elles n'ont cessé de se développer, de s'améliorer et de se complexifier.

Le nombre des algorithmes développés durant les trente dernières années n'a cessé de croître. La classification des méthodes d'identification modale devient actuellement une tâche difficile. Les similarités entre les différents algorithmes provient du fait que les équations différentielles fondamentales qui régissent les vibrations du système sont supposées être du second ordre, linéaires, à coefficients constants et plus fondamentalement sur les propriétés qui ont été supposées pour le système : linéaire, invariant dans le temps, observabilité<sup>(39)</sup> et réciprocity.

La classification générale donnée par Maia et al.<sup>(40)</sup> est fondée sur plusieurs critères qui ont été classés selon leur importance par ces auteurs. Le premier critère découle du domaine dans lequel les données sont traitées numériquement (temporel, fréquentiel) ; on pourrait y rajouter le domaine temps-fréquence pour prendre en

<sup>39</sup>L'observabilité d'un système caractérise la possibilité de retrouver l'état d'un système en observant sa sortie.

<sup>40</sup>N. M. M. Maia, J. M. M. Silva, J. He, N. A. J. Lieven, R. M. Lin, G. W. Skingle W-M. To et A. P. V. Ugueria, 1998. *Theoretical and Experimental Modal Analysis* ; Hertfordshire : Research Studies Press Ltd.

compte les techniques utilisant les transformations temps-fréquence. D’une façon très générale, les méthodes dans le domaine temporel ont tendance à donner de meilleurs résultats lorsque le contenu fréquentiel des données est situé dans une large plage et que le nombre de modes est élevé. À l’inverse, les méthodes fréquentielles obtiennent de meilleurs résultats si le contenu fréquentiel est limité et si le nombre de modes est relativement faible. Cependant, les méthodes dans le domaine temporel peuvent estimer seulement les modes qui se trouvent dans la plage fréquentielle de l’analyse et ne peuvent pas prendre en compte les effets résiduels des modes qui sont en dehors de ce domaine, à l’inverse des méthodes dans le domaine fréquentiel. La seconde distinction proposée par ces auteurs est le caractère direct ou indirect. Le qualificatif “indirect” signifie que l’identification est fondée sur le modèle modal c’est-à-dire sur les paramètres modaux (fréquences propres, taux d’amortissement, formes modales). Le qualificatif direct est donné lorsque la procédure repose sur les équations matricielles de base de la dynamique. Le troisième critère concerne le nombre de modes qui peuvent être analysés ; on parle de méthodes à 1 ou à plusieurs degrés de liberté<sup>(41)</sup>. Le dernier critère est fondé sur le nombre des entrées et sur celui des sorties qui peuvent être pris en compte par la méthode, on parle de méthodes à une entrée-une sortie ou de méthodes à une entrée-plusieurs sorties et finalement à plusieurs entrées-plusieurs sorties<sup>(42)</sup>. L’idée sous-jacente de ce critère est que les fréquences propres et les taux d’amortissement modaux ne varient pas en théorie, lorsque l’on passe d’une FRF à une autre. Par conséquent, il devient alors possible d’obtenir un ensemble de ces caractéristiques modales, plus consistant, en traitant en même temps plusieurs FRFs ou plusieurs RIs.

Allemang et al.<sup>(43)</sup> introduisent un concept original : le concept d’espace “caractéristique” assimilable à  $\mathbb{R}^3$  et dont le référentiel est formé par deux axes correspondant à l’information spatiale (en termes de degrés de liberté de l’entrée et de la sortie reprenant en compte les informations précédentes une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties) et par un troisième axe à l’information temporelle ou fréquentielle du domaine des mesures. Ce concept regroupe le premier et le dernier critère précédemment cités.

Pour le plan à suivre de ce paragraphe sur les méthodes d’identification linéaire, nous retenons le critère direct ou indirect proposé par Maia ; plus précisément, la distinction entre deux types d’approches : une approche basée sur la physique du phénomène (mécanique des vibrations linéaires ou analyse modale) et une approche basée sur une description générale des relations entrée-sortie (théorie des systèmes). Dans ces deux approches, les modèles reliant les mesures et les paramètres qui en découlent prennent respectivement le qualificatif de boîte blanche (en relation avec une connaissance physique du phénomène et des lois fondamentales du mouvement) respectivement de boîte noire (sans lien avec une connaissance physique du phénomène). Cette terminologie permet aussi d’introduire la notion de modèle en boîte grise pour prendre en compte des modèles partiellement basés sur des connaissances physiques.

On trouve aussi une autre terminologie, avec les qualificatifs de paramétrique et de non-paramétrique, qui peuvent être appliqués à des modèles ou des méthodes. Les méthodes d’identification paramétrique cherchent à déterminer les paramètres d’un modèle pré-supposé à partir de considérations physiques sur le phénomène de vibrations pour que la réponse du modèle “colle” avec celle de la structure réelle. Les méthodes non-paramétriques recherchent directement la meilleure représentation fonctionnelle du phénomène sans hypothèse a priori sur un modèle physique du comportement de la structure. On peut rajouter que dans les méthodes paramétriques, les paramètres sont en nombre fini avec une signification physique claire tandis que dans les méthodes non-paramétriques, les paramètres sont en nombre illimité, sans signification physique. Nous allons donc analyser plus en détails ces deux approches possibles.

### C.2.1 Approche “mécanique”

L’approche “mécanique” est liée à la description physique du phénomène (la mécanique des vibrations linéaires). On fait souvent l’hypothèse simplificatrice supplémentaire d’amortissement diagonal ou hypothèse de Basile. L’approche est alors basée sur le théorème de décomposition en série des modes normaux du système conservatif associé ou décomposition modale. Cette approche est appelée *analyse modale*. La propriété de décomposition modale est utilisée dans la majorité des techniques d’identification linéaire.

Une technique ancienne et familière des ingénieurs est la méthode de lissage de cercles introduite en 1947 par Kennedy et Pancu<sup>(44)</sup>. L’hypothèse principale est que la structure se comporte comme un oscillateur au voisinage de la fréquence de résonance (ce qui implique que les fréquences propres soient suffisamment éloignées). Alors, un balayage en fréquence donne la réponse forcée d’un oscillateur dont les paramètres sont identifiés à l’aide

<sup>41</sup>en anglais, les termes sont : SDOF (single degree of freedom) ou MDOF (multi degree of freedom).

<sup>42</sup>en anglais, les termes sont : SISO (single-input-single-output) ou SIMO (single-input-multi output) ou encore MIMO (multi-input-multi output).

<sup>43</sup>R. J. Allemang and D. L. Brown, 1998. *Journal of Sound and Vibration* **211**(3), 301–322. A unified matrix polynomial approach to modal identification.

<sup>44</sup>C-C. Kennedy and C-D-P. Pancu, 1947, *Use of the vectors in vibration measurement and analysis*, *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 14, pp. 603-625.



d'une méthode graphique dans le plan de Nyquist ou le plan de Nyquist inverse<sup>(45)</sup>. Un tracé de Nyquist (resp. Nyquist inverse) de la fonction de réponse en fréquence (FRF) produit une courbe voisine d'un cercle<sup>(46)</sup> (resp. d'une droite).

Une autre technique un peu ancienne aussi, est celle de l'appropriation modale ou appropriation des forces d'excitation développée par les ingénieurs de l'aéronautique et dont le fondement est principalement expérimental<sup>(47)</sup>. Dans cette technique, un mode normal réel du système conservatif associé est isolé en réglant l'amplitude des excitations harmoniques dont la fréquence est voisine de l'une des fréquences de résonance de la structure étudiée. Cette technique est habituellement basée sur le critère de résonance de phase où chaque point de la structure vibre en phase ou en opposition de phase avec les forces d'excitation. Les forces externes "compensent" les forces de dissipation visqueuses et le mouvement mesuré est proportionnel à la forme du mode étudié. L'identification dynamique du comportement d'une structure se réduit alors à l'identification d'un nombre fini d'oscillateurs linéaires avec amortissement visqueux. En conclusion, la technique d'appropriation modale est une procédure de test directe qui donne des descriptions modales fiables et permet de faire du recalage de modèles Eléments Finis. La procédure expérimentale est bien définie si la densité modale n'est pas trop importante et si l'amortissement est "faible". L'hypothèse de Basile sur l'amortissement limite son application puisque l'hypothèse d'un système d'équations du mouvement découplées n'est plus vérifiée. Quand la structure a un comportement non linéaire, la technique donne encore des résultats exploitables ; pour cela, la technique d'appropriation doit être utilisée plusieurs fois sur les modes les "plus" non linéaires en faisant varier le niveau de la force d'excitation. Une procédure de détection peut être alors introduite pour obtenir plus d'information sur le comportement non linéaire.

Les méthodes d'identification correspondantes utilisent généralement des techniques de minimisation dans le domaine fréquentiel ou temporel basées sur le principe des moindres carrés entre les réponses mesurées (fonctions de réponses en fréquence (FRF) ou réponses impulsionnelles (RI)) et les réponses du modèle (développement des FRF en fractions rationnelles ou développement des réponses impulsionnelles en séries d'exponentielles complexes amorties).

### C.2.2 Approche "théorie des systèmes"

L'approche basée sur la théorie des systèmes repose sur la relation de convolution entre l'entrée et la sortie dans le cas d'un système linéaire stationnaire. Si l'équation de convolution a toujours une solution, l'opération inverse, de déconvolution est un problème mal-posé. L'opération de déconvolution est en général très sensible aux erreurs de mesure qui peuvent conduire à des problèmes de non-convergence (oscillations numériques). Le problème se complique dans le cas de la dimension finie (relation entre le pas d'échantillonnage et le niveau des erreurs dans les mesures). Pour ces raisons, l'identification des réponses impulsionnelles n'est pas effectué par des procédures de déconvolution mais habituellement par une estimation de paramètres d'un modèle de prédiction entrée-sortie dans le domaine temporel. Le modèle peut être représenté soit en temps continu (par exemple par un système d'équations différentielles), soit en temps discret (par exemple par un système d'équations récurrentes).

Le modèle type dans le cas linéaire discret est un modèle type ARMA<sup>(48)</sup> ou le modèle ARMAX<sup>(49)</sup>. L'introduction d'un signal supplémentaire dans le modèle NARMAX permet de représenter toute perturbation dans les signaux de mesure mais aussi toute erreur de modélisation.

<sup>45</sup>Le plan de Nyquist ou plan complexe est le plan formé en abscisse par la partie réelle et en ordonnée par la partie imaginaire de la fonction de réponse en fréquence.

<sup>46</sup>On trouve un cercle dans les trois cas suivants : (1) FRF de type mobilité dans le cas d'un amortissement visqueux (cercle parcouru complètement lorsque la pulsation varie de 0 à  $\infty$ ), (2) FRF de type réceptance et (3) de type inertance dans le cas d'un amortissement hystérétique idéal ou appelé encore structural.

<sup>47</sup>L'appropriation des forces d'excitations à un mode vibratoire est le fait d'exciter la structure simultanément en plusieurs points par des forces harmoniques de signe et d'amplitude variables pour réduire dans la réponse de la structure la contribution des modes non désirés.

<sup>48</sup>Le modèle ARMA : autorégressif à moyenne mobile (Auto Regressive Moving Average) est introduit comme représentation par Gersch en 1970 ainsi que les équations de Yule-Walker pour l'estimation des coefficients du modèle. Un modèle linéaire discret ARMA d'ordre  $(m,n)$  est défini par une relation linéaire entre  $u_{mod}(t)$  représenté par ses échantillons

$u_{mod_k} = u_{mod}(t_k)$  aux instants  $t_k$  et  $F(t)$  représenté par ses échantillons  $F_k = F(t_k)$  :  $u_{mod_k} + a_1 u_{mod_{k-1}} + a_2 u_{mod_{k-2}} + \dots + a_m u_{mod_{k-m}} = b_0 F_k + b_1 F_{k-1} + b_2 F_{k-2} + \dots + b_n F_{k-n}$ .

<sup>49</sup>Le modèle ARMAX autorégressif à moyenne mobile avec des entrées exogènes (Auto Regressive Moving Average with exogenous inputs) est un modèle ARMA plus complet qui tient compte d'un bruit perturbateur  $w(t)$  représenté par ses échantillons  $w_k = w(t_k)$  aux instants  $t_k$ . Pour le modèle ARMAX d'ordre  $(m,n,p)$ , la relation linéaire entre  $u_{mod}(t)$ ,  $F(t)$  et  $w(t)$  s'écrit :

$$u_{mod_k} + \sum_{i=1}^{i=m} a_i u_{mod_{k-i}} = \sum_{i=0}^{i=n} b_i F_{k-i} + \sum_{i=1}^{i=p} c_i w_{k-i}$$

L'utilisation des modèles de type ARMA a conduit à de nombreuses techniques d'identification qui peuvent être unifiés dans un même schéma : les méthodes avec une erreur de prédiction minimum. On montre que le modèle ARMA est équivalent à une représentation dans l'espace d'état à un système linéaire stationnaire, à temps discret et soumis à une excitation stochastique Gaussienne. Cependant pour passer d'un modèle ARMA à la représentation d'état, il y a plusieurs façons de choisir le passage. Le choix d'une réalisation de l'espace d'état par exemple à l'aide de manipulations algébriques peut s'avérer difficile à obtenir. De plus, dans notre optique d'identification, le processus de réalisation doit être bien conditionné pour être efficace numériquement.

### C.3 Identification dynamique - Cas non linéaire - Quelques réflexions

La recherche d'une précision raffinée lors de l'identification modale a mis en lumière certaines limitations de ces méthodes. Ainsi, lorsque plusieurs méthodes d'identification modale sont appliquées à une même structure, les résultats obtenus sont parfois très différents. Il devient alors difficile d'envisager sereinement le recalage du modèle numérique ou l'établissement de lois de contrôle stables. Il faut noter que ces différences ne peuvent pas être attribuées à la mise en oeuvre des algorithmes mais plutôt à la nature mécanique du phénomène mesuré. Ainsi, la réalisation d'une structure articulée implique la présence de jeux et de frottements. La structure ne possède plus un comportement dynamique linéaire. Aucune des méthodes classiques d'identification ne tient compte de ces phénomènes de non-linéarités géométriques. De plus, les matériaux utilisés dans la réalisation, comme les matériaux composites, ne suivent pas toujours des lois de comportement linéaires. En parallèle, les structures subissent des endommagements, ce qui va causer des changements sur leurs caractéristiques dynamiques. Il devient alors nécessaire de prendre en compte ces nouveaux comportements dynamiques et de les identifier correctement.

La première étape dans le processus d'identification de structures à comportement non linéaire est comme nous l'avons déjà dit, la résolution du problème direct et dans notre cas, l'analyse mathématique et la résolution des équations différentielles non linéaires. De par ses études sur la théorie qualitative des équations différentielles<sup>(50)</sup> et l'utilisation de résultats de probabilités en mécanique, Henri Poincaré peut incontestablement être considéré comme le fondateur de la théorie des systèmes dynamiques<sup>(51)</sup>. Citons par exemple, la méthode approchée qui a pris son nom, pour résoudre les équations différentielles non linéaires. Les travaux de Duffing, au début du XX<sup>ème</sup> siècle, ont aussi inspiré des générations de mécaniciens et l'équation différentielle de Duffing (équation non linéaire du second ordre d'un oscillateur visqueux avec un terme cubique en déplacement) est de nos jours très souvent utilisée pour les applications numériques ou dans les benchmarks pour tester l'efficacité de telles ou telles méthodes d'identification non linéaire. L'oscillateur de Duffing<sup>(52)</sup> sert aussi d'illustration pour une grande variété de comportements typiques des systèmes non linéaires en génie mécanique tels que les phénomènes de résonance et synchronisations de type sous-harmoniques, sur-harmoniques<sup>(53)</sup> ou encore pour le pompage énergétique<sup>(54)</sup>. En ce qui concerne la théorie mathématique des systèmes non linéaires, la deuxième

<sup>50</sup>Dès son entrée à l'Ecole des Mines en 1875, les équations différentielles intéressent Henri Poincaré. Après un premier processus de modélisation, autrement dit d'écriture, les mathématiciens de cette époque se heurtent au problème de leur résolution. Poincaré propose sa "théorie qualitative des équations différentielles" pour les résoudre; ce qui implique que l'on procède avec méthode. Dans sa thèse de doctorat soutenue en 1879, il explique comment, à partir d'un phénomène continu, défini par des variables infiniment petites de position et de vitesse évoluant dans un intervalle de temps extrêmement petit, on peut étudier directement "l'équation différentielle" du mouvement. Il écrit : *"On cherche simplement à relier chaque instant à l'instant immédiatement antérieur; on admet que l'état actuel du monde ne dépend que du passé le plus proche, sans être directement influencé pour ainsi dire par le souvenir d'un passé lointain"*. Il suffit ensuite d'intégrer tous ces segments infinitésimaux pour décrire l'évolution générale du phénomène dans un intervalle de temps donné. Cependant, devant la complexité des intégrales, les solutions sont souvent approximatives; les solutions exactes étant limitées aux équations les plus simples à résoudre.

<sup>51</sup>Les écrits de Poincaré "Nouvelles méthodes de mécanique céleste en trois volumes publiés entre 1892 et 1899", conduiront à l'étude des systèmes dynamiques et aux modélisations des phénomènes non déterministes, ou "chaotiques". Poincaré se pose la question de l'évolution d'un des paramètres d'une équation différentielle sur sa solution et si une petite variation du paramètre peut provoquer ou non des changements considérables sur l'évolution globale du système (problème de stabilité de la solution vis à vis d'une perturbation sur un des paramètres de l'équation différentielle). Poincaré fut donc le premier à considérer la possibilité d'un chaos dans un système déterministe dans son travail sur les orbites des planètes. On n'accorda peu d'importance à ce travail jusqu'au début de la théorie du chaos en 1963.

<sup>52</sup>L'oscillateur de Duffing est constitué d'une plaque métallique mince et légère, encastrée à chaque extrémité. Au voisinage du milieu de la barre, se trouve un électro-aimant alimenté par un courant alternatif. Le passage du courant dans l'électro-aimant entraîne la flexion de la barre. La force de rappel ou interne dans la plaque est proportionnelle au déplacement au cube. L'énergie fournie par l'électro-aimant est dissipée durant chaque cycle du courant par résistance dans l'air et par échauffement interne de la plaque. Dans cet essai, on peut faire varier l'amplitude du champ magnétique.

<sup>53</sup>Pour des systèmes non linéaires soumis à une excitation harmonique à la fréquence  $\omega$ , on obtient toujours dans la réponse, en plus d'une oscillation à la fréquence  $\omega$ , des oscillations permanentes sur-harmoniques dont la fréquence est un multiple entier de  $\omega$  ( $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... ) et il arrive que sous certaines conditions, apparaissent des oscillations sous-harmoniques dont la fréquence est une fraction de  $\omega$  ( $\frac{\omega}{2}$ ,  $\frac{\omega}{3}$ ,  $\frac{\omega}{4}$ , ...). Dans le cas de systèmes amortis, l'amortissement provoque la diminution des amplitudes des vibrations sur-harmoniques et les vibrations sous-harmoniques peuvent être complètement atténuées.

<sup>54</sup>Dans le pompage énergétique, on cherche à savoir si l'on peut transférer l'énergie de la structure mécanique linéaire sous

moitié du XXème voit une explosion de résultats mathématiques rigoureux sur le comportement qualitatif et quantitatif des équations différentielles non linéaires<sup>(55)</sup>. Et ce n'est qu'assez récemment que ces travaux ont trouvé un écho chez les dynamiciens des structures.

La plupart des travaux de recherche en identification dynamique non linéaire avant 1990 se sont principalement concentrés sur des applications à des oscillateurs non linéaires avec des équations de mouvement relativement simples, par exemple sur la non-linéarité de type Duffing. Cependant, depuis une vingtaine d'années, on constate quelques tentatives intéressantes pour analyser des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Une deuxième étape est une auscultation préalable de la structure par des tests vibratoires appropriés permet de déceler le caractère non linéaire, d'évaluer l'amplitude des effets non-linéaires et de qualifier la précision des résultats obtenus par l'analyse modale<sup>(56)</sup>. En effet, l'application sans précaution des techniques usuelles de l'analyse modale à des systèmes présentant des défauts de linéarité peut conduire à une évaluation grossièrement erronée des caractéristiques dynamiques, même pour des non-linéarités faibles<sup>(57)</sup>. Dans certaines situations, cette auscultation peut même donner une idée approximative sur la nature des non-linéarités. La détection des non-linéarités s'effectue habituellement en étudiant la déviation d'une propriété linéaire appliquée au cas non linéaire. Une méthode "classique" est la recherche des distorsions dans les courbes de FRF lorsque l'on fait varier l'amplitude de l'excitation<sup>(58)</sup>. De telles distorsions peuvent être analysées par la méthode du premier harmonique<sup>(59)</sup>. En effet, de manière équivalente au concept de FRF dans le cas linéaire, il est possible de définir la *fonction de transfert généralisée* comme étant le rapport complexe de la composante fondamentale sur l'entrée harmonique<sup>(60)</sup>. Dans ma thèse, les distorsions engendrées par une non-linéarité cubique sont analysées

sollicitations dynamiques vers une structure annexe non linéaire. On crée donc, par l'ajout d'une structure à comportement non linéaire, un mode de vibration non linéaire tel que la structure annexe concentre l'essentiel de la vibration. Les travaux du professeur Alexander F. Vakakis et de ses collaborateurs constituent de bonnes références sur cette problématique. Ils ont déjà partiellement commencé de répondre aux questions posées quant à la faisabilité du pompage énergétique, d'un point théorique et d'un point de vue expérimental avec des essais en laboratoire sur des systèmes simplifiés (par exemple formés de deux masses avec une non-linéarité cubique). Citons les deux articles suivants :

A.F. Vakakis, 2001. Inducing passive nonlinear energy sinks in linear vibrating systems, Journal of Vibration and Acoustics, Vol 123, n°3, pp. 324-332 et

A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, O. Gendelman & L. Bergman, 2003. Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments, Journal of Sound and Vibration, Vol. 264, pp. 559-577.

<sup>55</sup>John Guckenheimer & Philip Holmes, 1983. Nonlinear oscillators, dynamical systems and bifurcations of vector fields, 1ère ed 1983, corr. 5ème tirage 1997, Springer Verlag. Ce livre applique les théories des systèmes dynamiques et des bifurcations à l'étude des oscillations non linéaires.

<sup>56</sup>Les articles suivants présentés dans les colloques avec actes (cf. [CONF5], [CONF10] et [CONF14]) décrivent plusieurs méthodes de détection, de quantification et de caractérisation des non-linéarités avec pour le deuxième cité, une application aux bâtiments sous chargement sismique.

<sup>57</sup>Il est assez difficile de caractériser la "faiblesse" du comportement non linéaire. On peut cependant dire que les non-linéarités sont faibles lorsque les variations des caractéristiques dynamiques supposées constantes dans le cas linéaire restent faibles dans le domaine d'amplitude exploré (par exemple, si les variations temporelles de la fréquence de résonance ne dépassent pas 1 à 2%).

<sup>58</sup>Le comportement non linéaire (même faible) d'une structure se manifeste habituellement par une distorsion des FRFs au voisinage des "résonances". L'amplitude de la distorsion dépend du type de non-linéarité ainsi que du type et de l'amplitude du signal excitatoire (cf. ma thèse).

<sup>59</sup>Dans la littérature, on trouve les dénominations équivalentes suivantes : méthode de linéarisation harmonique, méthode de l'équivalent harmonique, méthode du premier harmonique. Cette méthode est possible lorsqu'une solution périodique de période  $T$  ( $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ) est envisagée au problème non linéaire en régime stationnaire. On substitue à la représentation temporelle par équations différentielles, une représentation dans le domaine des fréquences. Plus précisément, on représente chaque histoire temporelle de la réponse par son développement en séries de Fourier pour obtenir un ensemble d'équations algébriques en équilibrant les termes à la même fréquence et de commencer une procédure itérative pour trouver les racines de ces équations. Pour le cas d'un système à 1 entrée  $F(t)$  et 1 sortie  $u(t)$ , on écrit :  $u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$ . Pour  $n = 1$ , le signal harmonique  $a_1 \cos(\Omega t) + b_1 \sin(\Omega t)$  est appelé **signal fondamental** alors que pour  $n > 1$ , on parle d'**harmoniques supérieures**. En général, le signal de sortie est périodique de même période que le signal d'entrée sauf dans certains cas (résonance sous-harmonique, oscillations propres, non périodicité). On peut éventuellement introduire un entier  $v$  pour prendre en compte des sous-harmoniques :  $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i n \frac{\Omega}{v} t}$  où  $A_n$  est un complexe. Pour un oscillateur de masse  $m$ , dont les oscillations sont régies par l'équation différentielle :  $m\ddot{u} + F_{NL}(t) = F(t)$ . On suppose  $F(t)$  périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  :  $F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin(n\Omega t)$ . A partir du développement en séries de Fourier de  $u(t)$ , on déduit celui de  $\ddot{u}(t) = -\Omega^2 \{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^2 \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 \sin(n\Omega t) \}$ . En identifiant terme à terme, on trouve le système d'équations algébriques :

$$\begin{cases} F_0 = f_0 \\ -n^2 \Omega^2 a_n + F_n(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = f_n \\ -n^2 \Omega^2 b_n + G_n(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = g_n \end{cases}$$

<sup>60</sup>Dans l'approximation du premier harmonique, on suppose que l'entrée est de la forme :  $F(t) = F_1 \cos(\Omega t)$ . On substitue au signal global, un signal équivalent composé uniquement du signal fondamental ou premier harmonique :  $u_{fond}(t) = u_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$  ou encore sous forme complexe  $u_1(F_1, \Omega) e^{i(\Omega t + \varphi_1)}$ . La fonction de transfert généralisée est définie par :  $N_1(F_1, \Omega) = \frac{u_1(F_1, \Omega) e^{i(\Omega t + \varphi_1)}}{F_1 e^{i(\Omega t)}} = \frac{u_1(F_1, \Omega) e^{i \varphi_1}}{F_1}$



par la méthode de premier harmonique.

Lorsque le comportement non-linéaire a été décelé, quantifié, voire caractérisé, des méthodes d'identification non linéaires peuvent être alors envisagées.

Les méthodes d'identification en dynamique peuvent comme précédemment, être réparties en deux familles : les méthodes paramétriques qui possèdent un nombre limité de paramètres et les méthodes non-paramétriques qui à partir de la connaissance des entrées et des sorties du système, recherchent la “meilleure” représentation fonctionnelle du comportement du système sans faire d'hypothèse a priori sur une forme présumée. Chacune de ces familles a des caractéristiques propres et des limitations dans leur application<sup>(61)</sup>. Il serait ambitieux de vouloir passer en revue l'ensemble des méthodes existantes pour mettre en valeur les avantages et les inconvénients de chacune. Nous limitons notre exposé à quelques méthodes qui nous ont semblé prometteuses.

Une première approche appelée approche par relevé des forces internes<sup>(62)</sup> que j'ai étudiée durant ma thèse, est une méthode non paramétrique qui recherche une forme approchée des forces internes<sup>(63)</sup> qui sont supposées accessibles lors d'un essai de vibration. Les forces internes sont identifiées par des techniques de lissage dans le plan d'état (principalement pour les comportements dissipatifs sans mémoire). Masri et al.<sup>(64)</sup> posèrent les fondements de la méthode pour un oscillateur. Les méthodes de lissage utilisent une technique de régression basée sur l'approximation bi-dimensionnelle au sens des moindres carrés suivant originellement les polynômes<sup>(65)</sup> de Tchebyshev puis suivant les polynômes de Legendre. A la différence des polynômes<sup>(66)</sup> de Legendre, l'erreur d'approximation avec les polynômes de Tchebyshev tend à osciller sur l'intervalle  $[-1, 1]$  avec une amplitude quasiment uniforme. Ainsi une approximation “satisfaisante” nécessite moins de termes dans la double sommation avec les polynômes de Chebyshev qu'avec ceux de Legendre. Pourtant, l'estimation numérique des coefficients de l'approximation bi-dimensionnelle avec les polynômes de Tchebyshev est plutôt compliquée. Les déplacements, vitesse et accélération doivent être mesurés en chaque degré de liberté ; ce qui nécessite une instrumentation lourde et par suite une analyse numérique complexe. Plusieurs auteurs ont tenté de remédier avec plus ou moins de succès à ces difficultés dans les années qui suivirent y compris Masri et Caughey eux-mêmes ; pour ne citer qu'un nom citons les travaux de Keith Worden<sup>(67)</sup>. Par exemple, Worden et Tomlinson ont mis au point des techniques d'interpolation élaborées pour remédier au problème d'un plan d'état “mal” ou insuffisamment recouvert par les points de mesure. On note un regain d'intérêt pour cette méthode<sup>(68)</sup>.

Nous allons dans les deux paragraphes suivants présenter brièvement deux approches non-paramétriques qui constituent un domaine de recherche privilégié en identification dynamique non-linéaire : les développements fonctionnels de Volterra et de Wiener qui ont été étudiés dans ma thèse et les formulations discrètes de type NARMAX. Finalement, deux paragraphes du chapitre IV appliquent deux techniques originales pour l'identification dynamique de structures en présence de non-linéarités respectivement sur les vibrations forcées d'une plaque avec frotteurs et sur les vibrations libres d'une poutre encastrée-libre avec une non-linéarité locale.

### C.3.1 Approche non-paramétrique par séries de Volterra ou de Wiener

La représentation de Volterra est une extension de la représentation intégrale des systèmes linéaires afin de prendre en compte des termes non-linéaires<sup>(69)</sup>. La relation entrée-sortie pour un système stationnaire, avec

<sup>61</sup>Citons l'ouvrage suivant : K Worden ; G R Tomlinson, 2000. Nonlinearity in Structural Dynamics : Detection, Identification and Modelling University of Sheffield, UK, Institute of Physics and IOP Publishing.

<sup>62</sup>en anglais : force-state mapping or restoring force surface method.

<sup>63</sup>Les forces internes sont définies comme la différence entre les forces externes appliquées au système et les forces d'inertie. Cette notion provient directement de la seconde loi de Newton (l'accélération d'un corps est proportionnelle à la force appliquée et s'effectue dans la direction de la droite d'action de cette force). Dans le cas des oscillations  $u(t)$  d'un oscillateur de masse  $m$  soumis à une force d'excitation  $F(t)$ , la force interne s'exprime par :  $f_{NL}(t) = F(t) - m \ddot{u}(t)$ .

<sup>64</sup>S.F. Masri & T.K. Caughey, 1979. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 433-447.

<sup>65</sup>Les polynômes de Chebyshev ont été introduits par Chebyshev en 1859. Le polynôme de Chebyshev de degré  $n$  est défini par :  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ .

Ils sont orthogonaux relativement à la fonction poids  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

<sup>66</sup>Pour les polynômes de Legendre avec la fonction poids égale à l'unité, l'erreur d'approximation a une amplitude qui augmente en moyenne lorsque l'on se rapproche des extrémités de l'intervalle.

<sup>67</sup>Citons les deux articles de Keith Worden au Journal Mechanical Systems and Signal Processing en 1990 : Data processing and experimental design for the restoring force surface method, Part I : “Integration and differentiation of measured time data” and Part II : “Choice of excitation signal”, Vol 4, pp. 295-344.

<sup>68</sup>Citons les deux thèses soutenues à l'Université de Liège : Vincent Lenearts, 2003. Identification de modèles structuraux en dynamique non linéaire (en français) et celle de Gaëtan Kerschen, 2003. On the model validation in the non-linear structural dynamics.

<sup>69</sup>Les études des séries fonctionnelles par Vito Volterra datent des années 1880 ; le développement de la relation entrée-sortie d'un système en séries s'inspirant du développement de Taylor d'une fonction. Des généralisations ultérieures furent faites par Fréchet autour de 1910, tout en restant dans un cadre purement mathématique.

des non-linéarités analytiques est développée en série de fonctionnelles  $\mathcal{V}_n[F(t)]^{(70)}$  qui ressemble à une sorte de “série de Taylor à mémoire”. Le nième terme de la série est une intégrale multiple d’ordre  $n$ , où la partie intégrée est formée du noyau de Volterra d’ordre  $n$  que l’on note  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , multiplié par  $\prod_{j=1}^{j=n} F(t - \tau_j) d\tau_j$ .

Ainsi, le premier noyau  $h_1(\tau_1)$  représente la réponse impulsionnelle de la partie linéaire du système ; les autres noyaux de Volterra  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  pour  $n > 1$  représentent les effets non linéaires du système. On note que pour un système de Volterra d’ordre  $M^{(71)}$ , si on multiplie l’excitation par un scalaire  $\alpha$  ; les différents termes dans le développement de la réponse à cette nouvelle excitation représentent respectivement les contributions de puissance linéaire, quadratique, cubique ou nième à la réponse totale<sup>(72)</sup>. Les principales limitations des séries de Volterra sont doubles : (1) problème de convergence des termes de la série<sup>(73)</sup> et (2) difficulté à séparer la contribution de chaque opérateur de Volterra de la série ; rendant de fait la mesure des noyaux de Volterra, peu facile à effectuer. Pour remédier à ces difficultés, Wiener propose de construire à partir des fonctionnelles de Volterra, un nouvel ensemble de fonctionnelles qui sont orthogonales au sens statistique du terme pour un certain type d’excitation<sup>(74)</sup>. La relation entrée-sortie s’exprime comme précédemment à l’aide d’une série de fonctionnelles de Wiener :  $G_n[k_n, F(t)]^{(75)}$  qui peuvent s’écrire sous une forme condensée à l’aide des fonctionnelles d’Hermite  $\Xi_n$  orthogonales à moyenne nulle<sup>(76)</sup>. Dans le chapitre sur les séries fonctionnelles dans ma thèse, je me suis appuyé sur l’excellent ouvrage de Schetzen<sup>(77)</sup>, publié en 1980. L’auteur décrit les motivations qui ont guidé Wiener dans ses travaux, compare les restrictions pour l’utilisation des différentes séries fonctionnelles ; cependant, il omet de présenter des résultats pratiques.

On peut situer l’utilisation des séries fonctionnelles de Volterra et de Wiener pour l’analyse des systèmes non linéaires dans les années 1960 avec les travaux de Barrett<sup>(78)</sup>. On peut citer les travaux de Spanos et de Vasilis Marmarelis sur l’application des techniques de corrélation croisée pour l’analyse de systèmes biologiques et mécaniques. Cependant avant les années 1985, les applications de cette méthode étaient principalement dans le domaine du contrôle. Plusieurs groupes de recherche animés respectivement par Billings, Vinh et Tomlinson ont mené des travaux de recherche importants sur l’application de l’approche des séries fonctionnelles pour l’identification des structures non linéaires. Chouychai<sup>(79)</sup> et Vinh proposent une mesure directe des noyaux de Volterra lorsque l’entrée consiste en de multiples impulsions, en faisant varier l’amplitude des impulsions ainsi que les retards entre les différentes impulsions et rencontrent des difficultés d’ordre expérimental considérables principalement pour générer des excitations multi-chocs. Billings développe des techniques pour les équations de récurrence différentielles discrétisées<sup>(80)</sup>.

<sup>70</sup>La relation entrée-sortie ème 1 entrée  $F(t)$ -1 sortie  $u_{mod}(t)$  peut s’écrire :

$$u_{mod}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n[F(t)] \text{ où } \mathcal{V}_n[F(t)] = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{j=1}^{j=n} F(t - \tau_j) d\tau_j.$$

<sup>71</sup>Un système de Volterra d’ordre  $M$  est un système pour lequel le développement fonctionnel de Volterra est limité aux  $M$  premiers termes.

$$^{72}u_{mod\alpha} = \sum_{n=1}^M \alpha^n \mathcal{V}_n[F(t)]$$

<sup>73</sup>Bien souvent, la représentation d’un système en séries de Volterra ne converge que pour un intervalle borné de l’amplitude du signal d’excitation. Ainsi, bien que les premiers termes non nuls de la série de Volterra peuvent, en général, représenter correctement la majorité des systèmes non-linéaires rencontrés, à moins que les conditions de convergence soient établies a priori, la troncature de la série ne peut pas être justifiée. De plus, la série de Volterra n’est pas capable de représenter la multiplicité des solutions propres aux systèmes non linéaires. Le nombre de termes nécessaire à la convergence de la série augmente rapidement lorsque l’on se rapproche d’un point de bifurcation et la convergence peut parfois être mise en défaut bien avant ce point.

<sup>74</sup>par exemple, on peut trouver dans ma thèse, les cas suivants pour l’excitation : (1)bruit blanc Gaussien stationnaire, (2)bruit non-blanc Gaussien stationnaire, (3)bruit blanc Gaussien non-stationnaire.

$$^{75}u_{mod}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} G_n[k_n, F(t)]$$

<sup>76</sup> $G_n[k_n, F(t)] = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \Xi_n(F; t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^{i=n} d\tau_i$ . Les fonctionnelles d’Hermite sont introduites dans l’ouvrage de Barrett (cf note de bas de page n° 78) lorsque  $F(t)$  est un bruit blanc gaussien de niveau de puissance  $A$  ; elles sont orthogonales, à moyenne nulle et les quatre premières fonctionnelles d’Hermite sont :  $\Xi_0(F; \tau) = 1$ ,  $\Xi_1(F; \tau) = F(\tau)$ ,  $\Xi_2(F; \tau_1, \tau_2) = F(\tau_1)F(\tau_2) - A\delta(\tau_1 - \tau_2)$  et

$$\Xi_3(F; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \prod_i^3 F(\tau_i) - A[F(\tau_1)\delta(\tau_2 - \tau_3) + F(\tau_2)\delta(\tau_3 - \tau_1) + F(\tau_3)\delta(\tau_1 - \tau_2)].$$

<sup>77</sup>Schetzen fut un étudiant de Wiener. Citons son ouvrage : Schetzen 1980. The Volterra and Wiener theories of non-linear systems, John Wiley & Sons, New-York.

<sup>78</sup>J.F. Barrett, 1963. The use of functionals in the analysis of nonlinear systems, Journal of Electronics and Control, Vol 15, pp. 567-615.

<sup>79</sup>Chouychai fut un étudiant du Professeur Vinh. Citons sa thèse de doctorat : T. Chouychai 1986. Comportement dynamique non linéaire des structures, ISMCM, St Ouen.

<sup>80</sup>Une équation de récurrence différentielle pour un système linéaire et stationnaire discrétisées entre une entrée  $u(t)$  et une excitation  $F(t)$  qui peut s’écrire sous une forme générale par :  $u_n = b_0 F_n + b_1 F_{n-1} + \dots + b_M F_{n-M} - a_1 u_{n-1} - \dots - a_N u_{n-N}$ .

On note que l'on peut par analogie avec la théorie des systèmes linéaires, à partir de la représentation en séries de Volterra, définir une FRF d'ordre  $n$  avec  $n \geq 1$  comme la transformée de Fourier d'ordre  $n$  du noyau de Volterra d'ordre  $n$  <sup>(81)</sup>.

La procédure d'identification du modèle de Volterra (resp. de Wiener) d'ordre  $M$ , qui caractérise au mieux notre système non linéaire en vibration, est fondée classiquement sur la minimisation de la fonction coût définie comme une norme <sup>(82)</sup> de l'erreur de modélisation :  $u_{mod}(t) - u_{mes}(t)$  où  $u_{mod}(t)$  représente la réponse du modèle d'ordre  $M$  en séries de Volterra (resp. de Wiener). La procédure de détermination des noyaux <sup>(83)</sup> est fondée sur une technique de corrélation croisée <sup>(84)</sup> proposée par Schetzen (cf. note de bas de page n°77). Les noyaux s'obtiennent successivement et leur détermination diffère quelque peu suivant le type d'excitation utilisé <sup>(85)</sup>. Dans le domaine dual, à partir des FRF d'ordres plus élevés qui peuvent être vues comme une forme d'analyse "hypermodale", on peut aussi estimer les paramètres des non-linéarités de structure par lissage de courbes. La visualisation des FRF pour des ordres plus élevés que deux est délicate et la procédure d'identification nécessite une procédure indirecte.

On trouve une première application importante dans le domaine de la dynamique des structures avec les travaux de Gifford et Tomlinson <sup>(86)</sup> qui réussissent à mesurer les noyaux de Volterra d'ordre 2 en utilisant les techniques d'inter-corrélation précédemment citées <sup>(87)</sup>. Ils établissent aussi la relation entre les FRFs d'ordre supérieur et les modèles d'équations différentielles non linéaires ; ils montrent aussi comment on peut interpréter les coefficients généralisés des séries de Volterra comme des résonances d'ordres plus élevés ; ces résonances donnant des informations sur les transferts d'énergie entre fréquences. Beaucoup d'auteurs depuis, ont proposé des améliorations pour l'utilisation des séries de Volterra en identification vibratoire non linéaire <sup>(88)</sup>.

Finalement, bien que la théorie par séries de Volterra fournisse une représentation appropriée pour les systèmes non linéaires et qu'elle soit largement développée, elle admet quelques points d'achoppement sérieux comme par exemple, la nécessité pour la non-linéarité d'être différentiable et la convergence non obligatoirement assurée.

### C.3.2 Approche non-paramétrique par modèle NARMAX

Le modèle NARMAX est la version du modèle ARMAX d'ordre  $(m, n, p)$  <sup>(89)</sup> étendu au cas d'une relation entrée-sortie non linéaire et introduit par Leontaritis et Billings <sup>(90)</sup>. Dans cette représentation, la prédiction de la réponse future est faite à partir de l'excitation et de la réponse aux instants passés. Ce modèle est a priori plus économique que celui obtenu par les séries de Volterra qui ne dépend que l'excitation passée. Le nombre de paramètres à identifier augmente très rapidement avec les ordres  $m$  et  $n$  mais aussi avec l'ordre du développement de la fonction non linéaire  $\mathcal{F}$  qui est généralement effectué sur une base de polynômes. La question est de savoir trancher sur les termes du développement dont la contribution est significative <sup>(91)</sup>. L'identification d'un modèle NARMAX demande deux étapes : (1) le choix de la structure du modèle qui comprend à la fois

<sup>81</sup>On définit la FRF d'ordre  $n$  (higher order frequency response function) par :

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-i(\tau_1\omega_1 + \dots + \tau_n\omega_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

<sup>82</sup>Le choix d'une norme dans le cas des séries de Volterra est plus délicat à faire car les fonctionnelles de Volterra ne vérifient pas à la différence des fonctionnelles de Wiener, des propriétés d'orthogonalité lorsque le signal d'entrée est un bruit blanc Gaussien.

<sup>83</sup>Lee et Schetzen qui travaillaient dans le domaine de l'électronique, montrèrent en 1965 que les noyaux de Wiener peuvent être déterminés directement au moyen de corrélation croisées lorsque l'entrée est un bruit blanc Gaussien.

<sup>84</sup>La fonction d'intercorrélation des deux signaux  $f(t)$  et  $g(t)$  est donnée par :

$$\Upsilon_{fg}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-\tau)} dt.$$

<sup>85</sup>On trouve dans ma thèse la détermination des noyaux de Volterra à partir des réponses à des excitations de la forme :  $F_{\beta, \alpha_i}(t) = \alpha_i (e(t) + \beta)$  ainsi que la détermination des noyaux de Wiener dans les trois cas d'excitation déjà mentionnés à savoir : (1) bruit blanc Gaussien stationnaire, (2) bruit non-blanc Gaussien stationnaire, (3) bruit blanc Gaussien non-stationnaire.

<sup>86</sup>S.J. Gifford & G.R. Tomlinson, 1989. Recent advances in the application of functional series to nonlinear structures, Journal of Sound and Vibration, Vol 135, pp. 289-317 et S.J. Gifford & G.R. Tomlinson, 1989. Understanding multi-degree of freedom non-linear systems via higher order frequency response functions, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, USA, pp..

<sup>87</sup>Avec presque toutes les techniques de l'époque, l'estimation des troisième et quatrième noyaux apparaît être très difficile.

<sup>88</sup>Citons la thèse de David M. Storer, 1991, Dynamic analysis of non linear structures using higher order frequency response functions, Thèse de l'Université de Manchester, où une synthèse bibliographique est faite.

<sup>89</sup>Dans le modèle NARMAX (Nonlinear ARMAX), la relation entrée-sortie est régie par :

$$u_{mod_k} = \mathcal{F}(u_{mod_{k-1}}, \dots, u_{mod_{k-m}}, F_{k-i}, \dots, F_{k-n}, w_{k-1}, \dots, w_{k-p}) + w_k$$

où  $\mathcal{F}(\cdot)$  est une fonction non linéaire ; par exemple  $\mathcal{F}$  peut être développée sous forme polynômiale des erreurs prédites, des entrées et des réponses retardés. On trouve aussi l'usage de formulations rationnelles ou de fonctions seuil discontinues.

<sup>90</sup>I.J. Leontaritis and S.A. Billings, 1985. Input-output parametric models for non-linear systems. Part II : stochastic non-linear systems, Int. Journal of Control, Vol 41, pp. 329-344.

<sup>91</sup>Une démarche itérative possible consiste à : (1) partir d'un modèle NARMAX "simplifié" dont la plupart des termes du développement de  $\mathcal{F}$  sont exclus et identifier ce modèle "simplifié", (2) tester l'apport de chacun des termes exclus à l'étape précédente et retenir ceux dont la contribution est importante et (3) re-tester tous les termes qui ont été retenus dont certains peuvent devenir sans effet significatif.

l'ordre  $(m, n, p)$  du modèle et l'ordre du développement de  $\mathcal{F}$  et (2) l'estimation des paramètres. Si l'étape (1) est connue, il existe des méthodes d'estimation des paramètres efficaces. Une amélioration du schéma original est proposé par Fabrice Thouverez et Louis Jézéquel<sup>(92)</sup> qui en utilisant des coordonnées modales pour exprimer le modèle NARMAX, réduisent considérablement le nombre de paramètres. Le nombre de tous les termes candidats possibles peut tout de même rester important, ce qui rend le processus d'identification compliqué et plus long en temps de calcul. La détection de la structure du modèle reste encore un problème ouvert dans l'identification de systèmes pour des modèles NARMAX sur-paramétrisés.

De nos jours, les modèles Eléments Finis sont devenus incontournables. Ainsi, l'intérêt s'est accru pour une classe de techniques d'identification basée sur les modèles éléments finis et appelées techniques de recalage de modèles EF. Le recalage de modèles a d'abord été introduit dans le contexte de la dynamique de structures linéaires<sup>(93)</sup>. On peut classer les méthodes de recalage en deux grandes familles : les méthodes globales et locales. Dans les méthodes globales, le recalage est fait directement sur les éléments des matrices de masse et de rigidité. Les matrices recalées reproduisent correctement les caractéristiques dynamiques de la structure réelle mais les corrections obtenues n'ont pas forcément de sens physique. De plus, les propriétés essentielles du système comme la propriété définie-positive des matrices peuvent être perdues. Les méthodes locales considèrent uniquement l'estimation des paramètres physiques incertains tels que le module d'Young et préservent les propriétés mathématiques du modèle initial. L'étape de corrélation entre le comportement du modèle EF et celui de la structure réelle pourrait se faire à partir des données temporelles brutes (mesurées et prédites). Pourtant, dans de nombreuses applications, on préfère effectuer cette comparaison sur une variable tirée de la réponse physique et qui représente efficacement l'information contenue dans les données mesurées. Les techniques de corrélation les plus populaires utilisent les fréquences propres et les modes propres. Dans ce cas, la corrélation est donnée par l'erreur relative sur les fréquences et le critère de confiance modale<sup>(94)</sup>. Une autre technique reconnue est l'utilisation de données dans le domaine fréquentiel ; ce qui évite l'effort d'analyse modale expérimentale pour obtenir les modes et les fréquences propres et le moyennage pour réduire les effets est direct. Si la corrélation n'est pas satisfaisante, le modèle EF doit être corrigé. Cette correction commence avec le choix des paramètres de recalage ; pour cela, les techniques de localisation d'erreurs, l'analyse de sensibilité et le expertise de l'ingénieur sont très utiles. Les nouvelles valeurs des paramètres de recalage sont calculées au moyen de la minimisation d'une fonction critère<sup>(95)</sup>.

Enfin notons que certains auteurs proposent même des "super" modèles qui sont des modèles Eléments Finis (EF) avec un maillage beaucoup plus fin que les modèles utilisés pour la conception ou la recherche de défauts. Ils pensent que ces super-modèles peuvent à terme remplacer les essais réels puisqu'ils ont suffisamment d'informations pour permettre le recalage d'un modèle dans la phase de conception de la structure étudiée. Quoiqu'il en soit, dans le cycle d'étude ou de production des structures, les techniques de recalage de modèles éléments finis et d'optimisation des structures prennent une place de plus en plus importante. Pour obtenir les informations nécessaires à leur mise en oeuvre, les techniques d'identification dynamique doivent être de plus en plus précises et fiables. Cet objectif pourra être réalisé premièrement grâce aux progrès technologiques qui rendent les instruments de mesures de plus en plus performants, peut-être aussi grâce aux progrès dans la modélisation fine du comportement des matériaux et des jonctions pour les éléments finis et finalement par l'utilisation d'algorithmes adaptés aux nouveaux moyens informatiques disponibles.

<sup>92</sup>F. Thouverez & L. Jézéquel, 1996. Identification of NARMAX models on a modal base, Journal of Sound and Vibration, Vol 189, pp. 193-213.

<sup>93</sup>Citons par exemple l'ouvrage suivant : M.I. Friswell & J.E. Mottershead, 1995. Finite element model updating in structural dynamics, Kluwer Academic Publishers, London, UK.

<sup>94</sup>Soient le jeu des variables mesurées  $(\omega_{mes}, \underline{\phi}_{mes})$  et celui de la simulation numérique  $(\omega_{sim}, \underline{\phi}_{sim})$ . L'erreur relative sur les fréquences est donnée par :  $\Delta f(\omega_{mes}, \omega_{sim}) = \frac{|\omega_{mes} - \omega_{sim}|}{\omega_{mes}}$  et le critère de confiance modale (MAC : modal assurance criterion)

par :  $MAC(\underline{\phi}_{mes}, \underline{\phi}_{sim}) = \frac{(\underline{\phi}_{mes}^T \underline{\phi}_{sim})^2}{(\underline{\phi}_{mes}^T \underline{\phi}_{mes})(\underline{\phi}_{sim}^T \underline{\phi}_{sim})}$ . Les valeurs du MAC oscillent entre 0 et 1 : la valeur de 1 correspond à une corrélation parfaite. Les fréquences propres sont toujours estimées avec un haut niveau de confiance et leur estimation n'est pas affectée par le problème de correspondance du maillage entre le montage expérimental et le modèle EF.

<sup>95</sup>Un des critères le plus simple est :  $\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (1 - MAC_i) + \Delta f(\omega_{mes_i}, \omega_{sim_i})$

où  $MAC_i$  désigne la valeur du MAC correspondant au  $i$ ème mode expérimental et  $N$ , le nombre de modes considérés dans l'étude. Ce critère est généralement non linéaire par rapport aux paramètres de recalage et il faut alors utiliser une procédure itérative pour recalculer le modèle.

## Introduction aux deux chapitres suivants

Avant de démarrer, il faut donner un cadre à notre étude : soit déterministe, soit aléatoire. La mécanique “usuelle” est déterministe mais elle est parfois inadaptée pour modéliser des phénomènes qui sont par essence aléatoires comme la houle. Depuis une vingtaine d’années, les recherches se sont accrues pour développer la mécanique aléatoire qui étudie et élabore des modèles mécaniques où interviennent des éléments aléatoires<sup>(96)</sup>. Ces éléments peuvent être l’excitation ou l’environnement<sup>(97)</sup> ou les paramètres qui apparaissent dans la modélisation même de la structure et dont les incertitudes de modélisation seront prises en compte à l’aide de variables aléatoires. Des développements récents en dynamique stochastique des structures concernent les approches analytiques basées sur les méthodes de moyennisation stochastique et les représentations par linéarisation à paramètres aléatoires<sup>(98)</sup>. Jusqu’à présent, la recherche que j’ai menée est restée principalement dans le domaine déterministe avec une intrusion dans les processus aléatoires avec le filtrage de Kalman et tout récemment avec l’étude des processus localement stationnaires pour modéliser des excitations ambiantes. Une première étape, nécessaire et importante dans l’identification des paramètres d’un modèle à partir des données mesurées, est de représenter le phénomène physique à l’étude : dans le cas présent, les vibrations d’un “objet”. Le mot “objet” est pris ici dans un sens très large et peut représenter aussi bien une structure mécanique, un assemblage électronique, ou tout autre chose.

On a vu dans le chapitre précédent, que les propriétés de l’opérateur mathématique qui relie l’ensemble des données mesurées et l’ensemble des paramètres du modèle sont importantes pour définir une procédure d’inversion. Afin de caractériser et définir cet opérateur mathématique, il faut maintenant représenter à la fois les réponses de l’objet et le phénomène mécanique qui les génère. Ce qui constitue le contenu des deux chapitres suivants : le premier s’intéresse à la représentation du phénomène vibratoire étudié et en particulier aux paramètres du modèle de comportement et le second à la représentation de l’ensemble des données de mesure qui sont naturellement discrètes.

La représentation du problème inverse vibratoire dépend fortement des propriétés que l’on connaît a priori (ou que l’on présuppose) pour le phénomène mécanique étudié, principalement pour la loi de comportement<sup>(99)</sup> ; et en particulier, les propriétés de linéarité et de stationnarité. Dans le cas non-linéaire, le choix du modèle mathématique du comportement de la structure est délicat : il faut que le modèle, tout en étant aussi simple que possible, se conduise d’une façon identique au système. Habituellement, un modèle aussi sophistiqué qu’il soit, ne reproduit pas parfaitement la réponse de la structure pour n’importe quelle source d’excitation mais est limité pour une certaine catégorie d’excitation (forme, amplitude, périodicité ou non, etc). Aussi, un compromis précision-simplicité doit rester constamment à l’esprit lors de l’élaboration d’un modèle.

Une des questions qui m’a préoccupé, et qui me préoccupe encore, est de savoir *si l’on peut caractériser un objet à l’aide d’une ou plusieurs fonctions et prédire son état ou son comportement dans des cas de sollicitations très divers ?*

Ainsi, chaque objet possède une réponse qui lui est propre en fonction des actions qu’on lui applique. Prenons l’exemple d’un ensemble de violons. Le frottement de l’archet sur les cordes d’un violon fournit une excitation acoustique de type harmonique qui excite le tablier du violon et la cavité génère la réponse du violon à la sollicitation. Si nous réglons la tension des cordes de manière identique, on s’aperçoit qu’ils ne sont pas tous accordés. Les légères variations de diamètre des cordes, leur nature, les différences entre les caisses de résonance font que chaque instrument possède sa sonorité, sa signature. Un stradivarius se distingue du violon de moindre qualité.

Nous cherchons généralement à représenter la réponse de l’objet soit aux sollicitations qu’il aura à subir, soit indépendamment de l’excitation. Dans la majorité des cas, il est difficile, sinon impossible de représenter l’ensemble des sollicitations auxquelles sera soumis l’objet. Nous cherchons donc à nous affranchir de cette contrainte.

---

<sup>96</sup>citons par exemple les travaux de Soize et de Bouc. Voici quelques communications récentes : (1) Soize C. & Chebli H., “Random uncertainties model in dynamic substructuring using a nonparametric probabilistic model”, Journal of Engineering Mechanics - ASCE, (accepted in February 2002) et (2) Bellizzi S. & Bouc R., Analysis of multi-degree of freedom strongly nonlinear mechanical systems with random input. Part I : nonlinear modes and stochastic averaging, Probabilistic Engineering Mechanics, vol 14(3), pp. 229-244, 1999 et Part II : equivalent linear system with random matrices and power spectral density matrix, Probabilistic Engineering Mechanics, vol 14(3), pp. 245-256, 1999.

<sup>97</sup>on peut citer par exemple pour des applications en génie civil : la turbulence atmosphérique ou la rugosité du sol.

<sup>98</sup>Par exemple, Soize propose une nouvelle approche pour analyser les incertitudes aléatoires en dynamique des structures qui utilise le principe du maximum d’entropie.

<sup>99</sup>En Mécanique des Milieux Continus, trois types d’équations de base sont habituellement établies : (1)les équations du mouvement, (2)les équations cinématiques et (3)les équations de comportement. Contrairement aux deux groupes d’équations duales (les équations du mouvement et les équations cinématiques) qui sont indépendantes de la constitution du matériau, les équations de comportement dépendent de la nature physique de l’objet et relient les équations de mouvement aux équations cinématiques.

Nous souhaitons donc qualifier la réponse de l'objet à certaines excitations afin de caractériser au mieux le comportement de l'objet que l'on teste. Ainsi, nous savons que la réponse de tout système linéaire causal avec des paramètres constants est égale au produit de convolution entre une fonction caractéristique de l'objet et l'excitation. La connaissance de cette fonction permet d'extrapoler la réponse de l'objet à n'importe quel type de sollicitation, c'est la réponse impulsionnelle ou percussionnelle. Dans le domaine de Laplace ou de Fourier, la transformée de la réponse impulsionnelle, lorsqu'elle existe, prend le nom de *fonction de transfert* dans le domaine de Laplace et de *fonction de réponse en fréquence* dans le domaine fréquentiel. Cependant, les notions précédentes deviennent insuffisantes pour décrire "correctement" le cas de comportement linéaire non stationnaire où les caractéristiques mécaniques dépendent du temps ou encore non linéaire. L'analyse de Fourier des signaux mesurés (par exemple des réponses transitoires de l'objet) ne suffit plus et mon travail actuel s'intéresse à l'analyse temps-fréquence et à un traitement approprié. Une question qui se pose alors est de savoir si l'on peut trouver un équivalent de la fonction de réponse en fréquence, fondé sur une transformation temps-fréquence qui puisse caractériser le comportement non stationnaire ou non linéaire ?



## Chapitre 2

# Les paramètres “physiques” du modèle

On a déjà mis l’accent, dans le chapitre précédent, sur une distinction importante entre une identification paramétrique et une identification non-paramétrique. Cette distinction apparaît initialement dans la représentation adoptée pour le phénomène réel étudié (par exemple relation entrée-sortie). On parle de représentation non-paramétrique ou encore externe et de représentation paramétrique ou encore interne.

La représentation non-paramétrique est une notion issue de la théorie des systèmes. Fondée sur des théorèmes essentiellement mathématiques, elle a une portée générale ; elle permet donc de représenter aussi bien le comportement d’un système mécanique que celui d’un système chimique ou sociologique. Le système est décrit sous une forme mathématique : une *boîte noire*, sans lien apparent avec la réalité physique. Plus généralement, l’identification dite en “boîte noire” recouvre un ensemble de techniques de modélisation non physiques ou semi-physiques qui servent à représenter des processus complexes de manière à réaliser un compromis convenable entre précision et complexité. Elles sont utilisées à des fins de contrôle, de prédiction ou de surveillance. Dans une représentation non-paramétrique, apparaissent encore des “paramètres” que nous allons tenter d’estimer par la suite. Ces paramètres sont “abstraits”, sans relation directe, explicite avec la physique du phénomène réel - ce qui peut expliquer la terminologie de non-paramétrique-. Leur valeur est, au démarrage de la procédure d’identification, complètement arbitraire et n’est soumise à aucune contrainte a priori. D’ailleurs, quelques techniques d’identification non-paramétrique ont déjà été proposées dans le premier chapitre.

La représentation paramétrique a une connotation plus concrète, plus “physique” puisqu’elle s’appuie sur l’écriture des lois régissant le comportement du système étudié. Dans le cas de systèmes mécaniques en vibration, la représentation interne sera formulée au moyen des équations de la dynamique des milieux continus ou des structures. Notre recherche se limite aux phénomènes de dynamique lente dans le domaine des basses fréquences<sup>(1)</sup>.

Dès 1920, les ingénieurs de la construction aéronautique, cherchant à construire des avions les plus légers possibles, se trouvent confrontés à résoudre des problèmes de vibration et de dynamique des structures. La mécanique des vibrations occupe donc une place importante dans leur formation et ensuite dans leur travail quotidien pour la prédiction du comportement aéroélastique des avions. Pendant quarante ans, les méthodes d’analyse limitées par les moyens de calcul à leur disposition, se fondent sur des modèles de structure soit analytiques, soit résultant d’une description de la structure en un petit nombre de degrés de liberté par des techniques de transfert ou de Rayleigh-Ritz.

A partir des années 60, les moyens informatiques font leur apparition ; leur expansion progressive et leur constante évolution bouleversent de façon catégorique le panorama des méthodes de résolution des équations de la dynamique des structures : les méthodes traditionnelles sont remplacées par des méthodes matricielles résultant de la discrétisation d’expressions variationnelles. Les progrès considérables de la méthode des éléments finis pour l’élaboration des modèles de structures en dynamique font croître en parallèle, le développement des méthodes de calcul numérique. De nouvelles méthodes numériques voient le jour, adaptées à la taille toujours croissante des maillages et à la complexité des éléments structuraux en liaison, qu’exigent les ingénieurs des bureaux d’études.

Si les techniques de calcul numérique, telles que les éléments finis, permettent d’obtenir avec une grande précision, les matrices de masse et de rigidité élastique pour des structures à géométrie complexe et formées de plusieurs assemblages mécaniques, les propriétés d’amortissement sont généralement estimées avec moins de soin. Les

---

<sup>1</sup>Citons le cas par exemple, des réponses vibratoires d’un ouvrage de génie civil soumis à l’arrivée d’ondes sismiques.

forces d'amortissement sont souvent introduites dans leur aspect modal généralisé de façon forfaitaire et sous des hypothèses simplificatrices dans le cas de comportement linéaire (amortissement visqueux, hypothèses de Basile<sup>(2)</sup>, de Rayleigh) pouvant conduire à des comportements éloignés de la réalité.

Une des premières questions que je me suis “naturellement” posé a été :

*Qu'est-ce que l'amortissement ?*

L'amortissement traduit la dissipation d'énergie lors de la vibration d'un système mécanique, c'est-à-dire la transformation de l'énergie de vibration mécanique (énergie cinétique + énergie de déformation) en un autre type d'énergie (généralement en chaleur). Ce qui entraîne une diminution de l'énergie de vibration et une irréversibilité du comportement. L'amortissement est donc responsable de la décroissance des vibrations libres d'une structure et du fait que les valeurs prises par la réponse d'une structure excitée à une résonance, restent finies. Les mécanismes provoquant la dissipation sont liés à des phénomènes physiques complexes. Il y a deux grands types d'amortissement : *interne* et *externe*. L'amortissement interne apparaît à l'intérieur d'un volume de matériau tandis que l'amortissement externe apparaît aux joints entre les différentes parties d'une structure et est dû aux effets de frottement, de glissement ou de cisaillement sur des surfaces en contact.

Je me suis donc intéressé aux différentes modélisations de l'amortissement en vue de les appliquer à des problèmes de vibrations de structures. Dans ma thèse, je me suis limité aux modèles linéaires.

Le contenu de ce chapitre se situe dans la représentation paramétrique. Son but n'est pas de reprendre les concepts de la théorie des vibrations pour l'analyse dynamique des structures, ni de présenter les méthodes numériques qui s'y rapportent (pour cela, on peut se rapporter par exemple à l'ouvrage de Géradin et Rixen<sup>(3)</sup>). L'approche paramétrique se heurte à la difficulté de définir et de modéliser a priori, les phénomènes de dissipation et de non-linéarités.

Les modèles rhéologiques m'ont toujours intéressé à cause de leur simplicité et des enseignements riches qu'ils apportent. C'est pourquoi ces modèles sont encore très utilisés dans les applications industrielles lors d'une phase préliminaire et en particulier, pour le problème de l'isolation vibratoire<sup>(4)</sup>.

Ce chapitre est divisé en quatre sections. La première est consacrée à quelques rappels sur les relations entre les contraintes et les déformations appelées lois de constitutives ou équations constitutives. La seconde traite de quelques modèles rhéologiques linéaires en donnant les principales fonctions caractéristiques pour chacun d'eux. Une attention particulière est donnée aux modèles utilisant le calcul fractionnel. La troisième s'intéresse aux équations différentielles de la dynamique. Les réponses vibratoires des oscillateurs linéaires basés sur les modèles rhéologiques précédents sont écrites. L'application de ces modèles à l'isolation vibratoire est aussi présentée. La dernière section donne quelques réflexions sur les oscillateurs non linéaires en particulier les modèles d'hystérésis liés à la plasticité et les modèles d'endommagement.

## A Les équations constitutives de la mécanique - Lois de comportement

On se place dans cette étude, sous les hypothèses de petites déformations et de comportement isotherme. On utilise la notation d'Einstein pour l'écriture tensorielle indicielle.

Le comportement élastique est habituellement celui de référence. Une relation de comportement élastique est une relation bi-univoque entre les tenseurs de contraintes et de déformations<sup>(5)</sup>. La théorie de l'élasticité rend compte de matériaux qui ont la capacité de stocker de l'énergie mécanique sans aucune dissipation d'énergie.

Sous l'action de forces plus ou moins importantes, les solides subissent des déformations plastiques, non élastiques, qui découlent d'un processus irréversible : la plus grande partie du travail de déformation se transforme en chaleur<sup>(6)</sup>. Les contraintes à l'état final dépendent du trajet de la déformation. Autrement dit, un état de déformation ne correspond pas à un état unique de contrainte. Par conséquent, les équations décrivant la déformation plastique ne peuvent pas, en principe, être considérées comme des relations bi-univoques entre les composantes du tenseur des contraintes et celles du tenseur des déformations (cf. relations de la loi de Hooke), mais elles doivent être des relations différentielles.

<sup>2</sup>L'hypothèse de Basile stipule que la matrice d'amortissement apparaissant dans la relation (2.24) est diagonalisable dans la base des modes propres de la structure non amortie.

<sup>3</sup>M. Geradin & D. Rixen, 1996, *Théorie des vibrations. Applications à la dynamique des structures*, 2e édition, Masson.

<sup>4</sup>L'enseignement que j'effectue à l'ENPC depuis 2002, traite d'isolation vibratoire.

<sup>5</sup>Dans l'hypothèse de petites perturbations, on note  $\sigma_{ij}(M, t)$  les composantes du tenseur de Cauchy et  $\varepsilon_{kl}(M, t)$  celles du tenseur d'élasticité.

<sup>6</sup>Lors d'une déformation plastique, la majeure partie de l'énergie (de l'ordre de 95%) est dissipée en chaleur, alors que seulement 5% de l'énergie fournie par la contrainte est transformée en énergie interne.



Ainsi, le comportement des matériaux est souvent plus complexe que l'élasticité. L'expérience montre que la déformation est toujours accompagnée d'effets thermiques, se traduisant par des échanges de chaleur et de variations de température. Une description satisfaisante des lois de comportement<sup>(7)</sup> doit s'effectuer dans le contexte de la thermodynamique macroscopique pour obtenir une écriture complète des lois de comportement (cf. Lemaitre et Chaboche<sup>(8)</sup>). Le postulat de l'état local<sup>(9)</sup> gère l'évolution de l'état thermodynamique du système à l'aide de variables d'état qui sont les variables observables<sup>(10)</sup> et les variables internes<sup>(11)</sup> notées  $V^{(m)}$  pour  $m \in [1, N_v]$ . On admet qu'il est toujours possible de trouver un système de variables d'état, appelé normal, qui possède la caractéristique suivante : le système n'échange pas de travail mécanique avec l'extérieur et le travail des irréversibilités intérieures est nul dans toute transformation aux variables d'état figées<sup>(12)</sup>. Le choix de la nature et du nombre des variables d'état permet une description plus ou moins précise du phénomène physique ; le choix de variables d'état et principalement de variables internes pour la description en fait à la fois une faiblesse, de par le nombre de modèles presque illimité (souvent un par auteur !) et une force, de par la possibilité de décrire une multitude de phénomènes complexes ! Le processus ainsi défini sera thermodynamiquement admissible si, à chaque instant de l'évolution, l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite<sup>(13)</sup>. Cette inégalité s'exprime à l'aide de la dissipation volumique  $\Phi$ <sup>(14)</sup> qui est généralement décomposée en la somme de la dissipation intrinsèque volumique  $\Phi_{int}$ <sup>(15)</sup> et de la dissipation thermique volumique  $\Phi_{the}$ <sup>(16)</sup> :  $\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{the}$ <sup>(17)</sup>. On dit qu'un matériau est mécaniquement réversible si  $\Phi_{int}$  est identiquement nulle dans toute transformation ; dans le cas contraire, le matériau est dit irréversible. Habituellement, on imagine une transformation thermique de dilatation telle que  $\underline{\dot{\epsilon}} = 0$ ,  $V^{(m)} = 0$  ce qui impose à l'inégalité de Clausius-Duhem d'être vérifiée que si  $s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}$ .

La dissipation intrinsèque volumique, comme la dissipation thermique, est une somme de produit de dualité des forces dissipatives avec des flux thermodynamiques<sup>(18)</sup>. On note que le flux thermodynamique est un terme de type taux :  $\frac{d}{dt}$ <sup>(19)</sup>. La thermodynamique des processus irréversibles (TPI) permet de trouver une relation entre les variables duales : les forces  $\underline{Y}$  et les flux  $\underline{y}$  thermodynamiques qui peut s'écrire sous la forme générale :  $\underline{Y} = Y(\underline{y}, \underline{\epsilon}, T, V^{(m)})$ <sup>(20)</sup>. Si la relation est linéaire, on parle de TPI linéaire<sup>(21)</sup> ; l'hypothèse de symétrie d'Onsager<sup>(22)</sup> permet alors l'introduction d'un potentiel de dissipation  $\Omega(\underline{y})$  qui dépend uniquement des flux et qui donne :  $\underline{Y} = \frac{\partial \Omega(\underline{y})}{\partial \underline{y}}$ <sup>(23)</sup>. Il est souvent commode d'exprimer le flux en fonction des forces ; on note  $\omega(\underline{Y})$

<sup>7</sup>Lorsque la déformation des matériaux dépasse un certain seuil, la déformation est une transformation irréversible, même si les effets thermiques sont négligés.

<sup>8</sup>J. Lemaitre et J.-L. Chaboche, 1996 Mécanique des matériaux solides. 2ème édition, Dunod.

<sup>9</sup>L'état thermodynamique d'un système homogène en évolution est caractérisé par le même jeu de variables d'état qu'à l'équilibre, indépendamment des vitesses d'évolution de ces variables. Cette dernière hypothèse implique que toute évolution peut être considérée comme une succession d'états d'équilibre (exclusion des phénomènes ultra-rapides).

<sup>10</sup>En général, on se limite aux deux variables observables de la température  $T$  et de la déformation totale en petites déformations

<sup>11</sup>Pour les matériaux dissipatifs, l'état actuel dépend à chaque instant des valeurs des variables internes d'après le postulat de l'état local.

<sup>12</sup>En variables normales, la température et l'entropie sont deux variables conjuguées :  $T = \frac{\partial E}{\partial S}$  où  $E$  est l'énergie interne et  $S$  l'entropie du système.

<sup>13</sup>L'inégalité de Clausius-Duhem contient le second et le premier principes de la thermodynamique. Dans l'hypothèse de petites perturbations, elle s'écrit :  $\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0$  où  $\Psi$  est l'énergie libre spécifique,  $s$  est une densité d'entropie spécifique et  $\underline{q}$  est le vecteur courant de chaleur. Le point implique la dérivation par rapport au temps réel.

<sup>14</sup>La dissipation volumique  $\Phi$  est la vitesse de production intérieure d'entropie multipliée par la température. On a :  $\Phi = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_{,i}}{T}$ . L'inégalité de Clausius-Duhem entraîne que  $\Phi$  est toujours positive ou nulle.

<sup>15</sup> $\Phi_{int} = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T})$ . Elle est généralement dissipée sous forme de chaleur. Dans le cas général où  $\Psi = \Psi(\underline{\epsilon}, T, V^{(m)})$ , la dissipation intrinsèque s'écrit :  $\Phi_{int} = (\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}}) \dot{\epsilon}_{ij} - \rho(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + s) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V^{(m)}} \dot{V}^{(m)}$ .

<sup>16</sup> $\Phi_{the} = -q_i \frac{T_{,i}}{T}$ . Elle est dissipée par conduction thermique.

<sup>17</sup>On postule souvent que l'on a de façon séparée les inégalités suivantes :  $\Phi_{int} \geq 0$  et  $\Phi_{the} \geq 0$ . Ce qui assure que  $\Phi \geq 0$ .

<sup>18</sup>Les forces dissipatives sont les forces thermodynamiques multipliées par  $T$ . Les forces thermodynamiques sont directement reliées aux variables d'état. Elles éloignent le système de sa position d'équilibre : elles caractérisent l'écart à l'équilibre.

<sup>19</sup>Les flux thermodynamiques entraînent le retour du système vers l'équilibre : ils caractérisent donc la vitesse de retour vers l'équilibre.

<sup>20</sup>Dans le cas général où  $\Psi = \Psi(\underline{\epsilon}, T, V^{(m)})$ , on peut définir les forces thermodynamiques par :  $\underline{Y} = \left[ \left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right), -\rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial T} + s \right), A^{(m)} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V^{(m)}}, T_{,k} \right]^T$  et les flux thermodynamiques par :  $\underline{y} = \left[ \dot{\epsilon}_{ij}, \dot{T}, -\dot{V}^{(m)}, -\frac{q_k}{T} \right]^T$ .

<sup>21</sup>Pour des systèmes au voisinage d'un équilibre, en petite transformation, on imagine bien que la relation reliant les forces et les flux thermodynamiques soit linéaire :  $\underline{Y} = \underline{L} \underline{y}$ .

<sup>22</sup>L'hypothèse phénoménologique d'Onsager(1931) dit qu'il existe une relation de symétrie dans le cas où les forces et les flux thermodynamiques sont reliés linéairement :  $L_{ij} = L_{ji}$ .

<sup>23</sup>Dans ce cas on a :  $\Omega(\underline{y}) = \frac{1}{2} \underline{y} : \underline{L} : \underline{y}$  que l'on peut relier à la dissipation intrinsèque volumique par :  $\Omega(\underline{y}) = \frac{1}{2} \Phi_{int}$ .

le potentiel correspondant. Dans le cas linéaire,  $\omega(\underline{\mathbf{Y}})$  est aussi une forme quadratique<sup>(24)</sup> et on a :  $\underline{\mathbf{y}} = \frac{\partial \omega(\underline{\mathbf{Y}})}{\partial \underline{\mathbf{Y}}}$ . Dans le cas où la relation est non-linéaire, pour définir les lois complémentaires qui vont décrire le comportement irréversible du système, on postule l'existence d'un potentiel de dissipation (ou pseudo-potentiel) qui est une fonction continue à valeur scalaire dépendant des flux  $\underline{\mathbf{y}}$  mais pouvant dépendre aussi de l'état actuel  $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, V^{(m)})$  et telle que :  $\underline{\mathbf{Y}} = \frac{\partial \Omega(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, V^{(m)})}{\partial \underline{\mathbf{y}}}$  (propriété de normalité ou de dissipativité normale)<sup>(25)</sup>. Le potentiel  $\Omega$  est une fonction convexe, positive et nulle à l'origine dans l'espace des variables flux. L'expression des flux en fonction des forces peut s'obtenir à l'aide de la transformée de Legendre-Fenchel<sup>(26)</sup>. Si la fonction  $\omega$  est suffisamment régulière (la fonction potentiel  $\omega$  est une fonction convexe non négative et nulle à l'origine), alors  $\omega(\underline{\mathbf{Y}}) = \sup_{\underline{\mathbf{y}}} [\underline{\mathbf{y}} \underline{\mathbf{Y}} - \Omega(\underline{\mathbf{y}})]$ . Les règles complémentaires d'évolution des variables flux s'expriment alors par :  $\underline{\mathbf{y}} = \frac{\partial \omega(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, V^{(m)})}{\partial \underline{\mathbf{Y}}}$ . Cette règle de normalité est suffisante mais non nécessaire pour que le second principe soit vérifié a priori. Elle s'applique pour les matériaux standards généralisés<sup>(27)</sup>. La difficulté de la modélisation des phénomènes mécaniques réside dans l'expression du potentiel d'énergie libre spécifique  $\Psi$  et du potentiel de dissipation  $\Omega$  ou de son dual  $\omega$ . Cette recherche est aussi étroitement liée à l'identification de ses potentiels à partir d'expériences caractéristiques. Les variables flux  $\underline{\mathbf{y}}$  thermodynamiques et les variables duales  $\underline{\mathbf{Y}}$  se prêtent bien à la mesure<sup>(28)</sup>; par conséquent la modélisation et l'identification portent généralement sur leurs écritures.

Les effets de dissipation d'énergie lors de vibration sont dûs à de l'amortissement qui peut avoir plusieurs origines et qui a fait l'objet d'études particulières pendant mes années de recherche passées. Il y a plusieurs modélisations possibles pour prendre en compte des phénomènes dissipatifs; les plus classiques sont la viscoélasticité, la plasticité, l'élastoplasticité et encore la viscoplasticité. C'est la dépendance des contraintes vis-à-vis de l'histoire antérieure des déformations qui va pouvoir prendre en compte la dissipation d'énergie<sup>(29)</sup>. Dans le plan contrainte-déformation, sous sollicitations cycliques, apparaissent des boucles d'hystérésis.

En conclusion, la formulation mathématique des modèles mécaniques retenus doit refléter non seulement le comportement complexe du matériau utilisé (béton, acier, maçonnerie, composites, etc.) mais aussi les processus auxquels ils sont exposés (dissipation, détérioration, etc.). Les paramètres qui vont être estimés sont ceux-là même apparaissant dans les lois fondamentales de la mécanique et principalement dans les lois de comportement.

## A.1 Comportement élastique

L'expérience montre que lorsque la déformation est petite et inférieure à  $10^{-4}$ , elle dépend linéairement de la contrainte : c'est la loi de Hooke<sup>(30)</sup>. Dans le cas tridimensionnel, elle s'écrit :  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$  où  $C_{ijkl}$  sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 qui à cause des symétries, a 36 composantes indépendantes sur les 81 le

<sup>24</sup> $\omega(\underline{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{Y}} : \underline{\mathbf{L}} : \underline{\mathbf{Y}}$  où  $\underline{\mathbf{L}}$  et  $\underline{\mathbf{L}}$  sont inverses l'un de l'autre.

<sup>25</sup>On peut noter que la propriété de symétrie d'Onsager reste valable au sens de la symétrie des dérivées secondes :  $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_m \partial y_n} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n \partial y_m}$  du potentiel de dissipation.

<sup>26</sup>Soit  $f(x)$  une fonction convexe quelconque. La transformée de Legendre-Fenchel  $f^*(y)$  de  $f(x)$  est par définition la fonction :  $f^*(y_0) = \max_x x y_0 - f(x) = x_0 y_0 - f(x_0)$ . Si le maximum est atteint pour  $x = x_0$ , les éléments  $(x_0, y_0)$  forment alors un couple associé.

<sup>27</sup>Un matériau admet une loi de comportement standard généralisé si l'on peut associer aux lois de comportement du matériau une énergie libre et un potentiel de dissipation. L'énergie libre s'exprime en fonction des valeurs actuelles des variables d'état et le potentiel de dissipation, comme une fonction convexe des flux et peut éventuellement dépendre de l'état actuel.

<sup>28</sup>Les valeurs de  $\underline{\mathbf{y}}$  et de  $\underline{\mathbf{Y}}$  sont quasiment inaccessibles à la mesure car elles représentent une énergie le plus souvent dissipée sous forme de chaleur.

<sup>29</sup>Certains auteurs parlent de mémoire continue par différence au comportement élastique pour lequel on parle de mémoire privilégiée en ce sens où le matériau ne se souvient que d'une seule configuration prise comme état de référence, en général l'état naturel du milieu qui a lieu à l'instant initial ("zero memory") où le milieu est dépourvu de contraintes et où la température est constante.

<sup>30</sup>Dans le cas de comportement uniaxial, on trouve la loi de Hooke sous la forme :  $\sigma = E \varepsilon$  où  $E$  est une constante élastique appelée module d'Young.

Cette relation linéaire trouve une explication physique simple grâce à la structure interne du matériau et des forces qui agissent sur les atomes de la structure. Prenons l'exemple d'un solide cristallin qui est stable grâce aux forces d'interaction (forces ioniques ou métalliques ou covalentes ou de Van der Waals, ...) entre les atomes le constituant. On montre que le potentiel interatomique  $V(r)$  est une fonction de la distance atomique  $r$  qui admet un minimum pour  $r = r_0$  où  $r_0$  est la distance entre deux atomes qui correspondrait à la maille du cristal pour un matériau de structure cubique simple. Sous l'action d'une force agissant sur le cristal, la distance interatomique passe de  $r_0$  à  $r$ ; le déplacement  $u$  s'écrit alors :  $u = r - r_0$ . Un développement limité au deuxième ordre de  $V(r)$  au voisinage de  $r_0$ , où  $V(r)$  est minimum permet de déduire que la force d'interaction entre atomes est reliée linéairement

constituant. De façon précise, un solide est dit élastique si la déformation et la température forment un système de variables normales et si le matériau est réversible<sup>(31)</sup>. En petite déformation autour d'un état de référence (déformation nulle, température  $T_0$ ) sans contrainte, on obtient le modèle de thermo-élasticité linéaire<sup>(32)</sup>.

La structure des équations de la dynamique dans le cadre de l'élasticité isotherme sous l'hypothèse de petites déformations est formée de trois ensembles d'équations : les équations dynamiques au nombre de (3) et les équations cinématiques au nombre de (6) relevant de concepts universels et entre les deux faisant le lien, les relations de comportement au nombre de (6) qui sont du ressort de la physique particulière au matériau. Les équations de mouvement ou de l'équilibre sont des équations globales qui sont considérées comme fiables. Les équations de liaison traduisent des liaisons cinématiques et/ou des efforts imposés, parfois difficiles à écrire. La relation de comportement est une équation locale, précisant la relation contrainte-déformation en chacun des points de la structure. Classiquement, les paramètres caractéristiques apparaissant dans la loi de comportement du matériau sont identifiés à partir de résultats d'essais en laboratoire. On note que les opérateurs qui interviennent dans les chaînes dynamique et cinématique sont adjoints, ce qui est d'une grande importance pour les problèmes d'identification de paramètres dans les lois de comportement. Parmi les méthodes d'identification des matériaux, on peut citer les travaux de Ladevèze<sup>(33)</sup> qui propose dans le cas élastique non homogène, de rechercher le tenseur d'ordre 4 reliant les tenseurs d'ordre 2 respectivement des déformations et des contraintes, dans l'espace des tenseurs d'ordre 4 symétriques, positifs, minimisant une "erreur en loi de comportement". D'ailleurs, la représentation par force interne et l'identification qui en découle, est fondée sur la même idée à savoir que la relation de comportement est la plus sujette aux erreurs de modélisation de part sa nature.

Dans le problème direct pour des matériaux élastiques dans le cas de la dynamique, si on prend le déplacement  $u$  comme inconnue principale, on aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en  $u$ , linéaire si l'élasticité est linéaire. Classiquement, on se ramène à un système d'équations différentielles (par exemple résultant de la discrétisation des équations aux dérivées partielles après utilisation d'une formulation variationnelle).

## A.2 Comportement viscoélastique linéaire

À partir des années 1950, le modèle de comportement viscoélastique linéaire a été étudié de façon précise et détaillée par Mandel, Persoz puis Salençon<sup>(34)</sup>. Depuis 1980, la prise en compte des effets viscoélastiques est devenue une pratique courante pour le calcul et le dimensionnement des structures.

L'étude des modèles de comportement viscoélastique linéaire a été commencée pendant ma thèse.

D'un point de vue thermodynamique, on obtient un comportement visqueux lorsque les forces dissipatives s'expriment comme une fonction régulière des flux.

Intéressons nous d'abord au cas purement visqueux et isotherme<sup>(35)</sup>. On suppose l'énergie libre spécifique  $\Psi$  de la forme  $\Psi(\underline{\varepsilon}, T, V^{(m)})$ <sup>(36)</sup>. Le potentiel de dissipation s'exprime sous la forme :  $\Omega = \Omega(\dot{V}^{(m)})$ . La relation de normalité s'écrit :  $A^{(m)} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V^{(m)}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{V}^{(m)}}$ . Dans le cas où  $\Psi$  et  $\Omega$  sont des formes quadratiques<sup>(37)</sup> (cas linéaire), les relations précédentes deviennent :

---

à  $u : F = -\left(\frac{d^2 V}{dr^2}\right)_{r=r_0} u$ . La constante de proportionnalité est reliée à la courbure du potentiel (cf. J. Douin 1997, *Mécanique des milieux continus. Introduction à la plasticité des matériaux*. Diderot Editeur, Arts et Sciences.).

<sup>31</sup> $\Phi_{int} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi(\underline{\varepsilon}, T)}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij}$  est nulle car le processus est réversible. On obtient donc une relation biunivoque entre la

contrainte et la déformation, à une température donnée :  $\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi(\underline{\varepsilon}, T)}{\partial \varepsilon_{ij}}$ .

<sup>32</sup>Le modèle de thermo-élasticité linéaire est obtenu grâce à un développement de  $\Psi$  limité au second ordre par rapport aux variables d'état  $\underline{\varepsilon}$  et  $T = T - T_0$ .

<sup>33</sup>Citons par exemple :

(1) P. Ladevèze, 1975, Comparaison de modèles de milieux continus. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI. et

(2) P. Ladevèze, 1996, Mécanique non linéaire des structures, Edts Hermès.

<sup>34</sup>Citons le cours de calcul des structures anélastiques de Jean Salençon à l'ENPC : "Viscoélasticité", 1983, aux Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

<sup>35</sup>La dissipation thermique est nulle, mais la dissipation intrinsèque ne l'est pas.

<sup>36</sup>On peut imaginer d'abord une transformation à température constante et uniforme qui ne modifie pas les variables internes.

L'inégalité de Clausius-Duhem qui doit être vérifiée  $\forall \underline{\varepsilon}$ , implique que :  $\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi(\underline{\varepsilon}, T)}{\partial \varepsilon_{ij}}$ . La dissipation intrinsèque s'écrit alors :

$\Phi_{int} = -\rho \sum_m \frac{\partial \Psi}{\partial V^{(m)}} \dot{V}^{(m)}$ . Les vecteurs de forces dissipatives et de flux thermodynamiques s'écrivent :  $\underline{Y} = \left[ A^{(m)} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V^{(m)}} \right]^T$

et  $\underline{y} = \left[ -\dot{V}^{(m)} \right]^T$

<sup>37</sup> $\rho \Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \underline{\varepsilon} : \sum_m B^{(m)} : V^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_m V^{(m)} : D^{(m)} : V^{(m)}$  et  $\Omega = \frac{1}{2} \sum_m \dot{V}^{(m)} : E^{(m)} : \dot{V}^{(m)}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \sum_m B_{ij}^{(m)} : V^{(m)} \text{ et}$$

$$A^{(m)} = B^{(m)} : \underline{\underline{\varepsilon}} + D^{(m)} : V^{(m)} = -E^{(m)} : \dot{V}^{(m)}.$$

Chaque variable interne  $V^{(m)}$  vérifie une équation différentielle du premier ordre avec second membre.

Ensuite, pour pouvoir rajouter de l'élasticité et par la-même obtenir un comportement viscoélastique, on exprime classiquement la contrainte en séparant la partie réversible de la partie irréversible :  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^r + \underline{\underline{\sigma}}^{ir}$ . Les relations

précédentes s'écrivent :  $\sigma_{ij}^r = \rho \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial \varepsilon_{ij}}$  et la dissipation intrinsèque devient :

$$\Phi_{int} = \underline{\underline{\sigma}}^{ir} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho \sum_m \frac{\partial \Psi}{\partial V^{(m)}} \dot{V}^{(m)} = \underline{\underline{\sigma}}^{ir} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \sum_m A^{(m)} \dot{V}^{(m)}. \text{ Le potentiel de dissipation s'exprime : } \Omega =$$

$\Omega(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \dot{V}^{(m)})$ . Les relations de normalité s'écrivent :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{ir} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} \text{ et } A^{(m)} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V^{(m)}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{V}^{(m)}}.$$

Dans le cas linéaire où  $\Psi$  et  $\Omega$  sont des formes quadratiques<sup>(38)</sup>, on obtient :  $\sigma_{ij}^{ir} = F_{ij}^{(m)} : \dot{V}^{(m)} + \eta_{ijkl} : \dot{\varepsilon}_{kl}$  et

$$\sigma_{ij}^r = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \sum_m B_{ij}^{(m)} : V^{(m)}$$

et finalement :

$$E^{(m)} : \dot{V}^{(m)} + D^{(m)} : V^{(m)} = -F^{(m)} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - B^{(m)} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

On retrouve le modèle de type Kelvin-Voigt lorsque la déformation est le seul mécanisme dissipatif; on obtient alors :  $\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^{ir} = \underline{\underline{\eta}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ . On obtient finalement :  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\eta}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ . On trouve que comme précédemment, chaque variable interne est solution d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre.

Pour le modèle de type Maxwell, on a une variable cachée qui est la déformation visqueuse (du dash-pot) que l'on note  $V^{(1)} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^v$  et on pose  $F^{(1)} = 0$  et  $\underline{\underline{\eta}} \equiv 0$ ; ce qui entraîne  $\underline{\underline{\sigma}}^{ir} \equiv 0$  et  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^v$ . On a aussi :

$$\Omega = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\eta}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \text{ et } \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^v + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^v = -\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

On se restreint dans la suite de ce paragraphe à la viscoélasticité linéaire qui en général, peut suffire pour étudier le comportement de matériaux viscoélastiques (comme certains polymères). On s'intéresse à la formulation fonctionnelle de la relation contrainte-déformation. On s'intéresse au cas où l'opérateur qui relie la contrainte et la déformation est univoque, continue, linéaire et vieillissant. Lorsque l'espace où varient les déformations et les contraintes est celui des fonctions différentiables, le théorème de Riesz-Radon permet de représenter l'opérateur contrainte-déformation sous la forme d'une intégrale de Stieljes. Il existe plusieurs variantes de ce théorème suivant la nature des espaces où évoluent les contraintes et les déformations. Lorsque les espaces des contraintes et des déformations sont des espaces de distributions scalaires admissibles, le théorème des noyaux dû à Laurent Schwartz<sup>(39)</sup> permet de représenter l'opérateur dans le cas vieillissant par une composition de Volterra.

L'hypothèse essentielle de la viscoélasticité linéaire est celle de la mémoire<sup>(40)</sup> caractérisé par le noyau de la représentation intégrale. Le matériau conserve une certaine mémoire de son histoire antérieure. Les qualificatifs de la mémoire sont principalement le vieillissement ou le non-vieillissement<sup>(41)</sup> suivant que les propriétés de l'opérateur évoluent ou n'évoluent pas avec le temps.

L'hypothèse de causalité<sup>(42)</sup> est classique et indispensable dès qu'apparaît la notion de temps réel; le modèle prend le qualificatif d'héréditaire. On introduit, généralement, une d'hypothèse supplémentaire de mémoire évanescence<sup>(43)</sup> pour atténuer les effets de l'histoire plus ancienne. Certains auteurs (Coleman et Noll, 1960)

<sup>38</sup>  $\rho \Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \underline{\underline{\varepsilon}} : \sum_m B^{(m)} : V^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_m V^{(m)} : D^{(m)} : V^{(m)}$  et

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_m \dot{V}^{(m)} : E^{(m)} : \dot{V}^{(m)} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \sum_m F^{(m)} : \dot{V}^{(m)} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\eta}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}.$$

<sup>39</sup> Le théorème des noyaux de L. Schwartz énonce que toute transformation univoque, linéaire et continue de  $\mathcal{D}(T_1)$  vers  $\mathcal{D}'(T)$  où  $\mathcal{D}(T_1)$  est l'ensemble des fonctions tests indéfiniment dérivables et à support compact (topologie forte) et  $\mathcal{D}'(T)$  est l'espace dual des distributions (topologie faible),  $T$  et  $T_1$  étant des ensembles isomorphes à  $\mathbb{R}$ , peut être représenté de façon unique à l'aide d'un opérateur de Volterra généralisé :  $\sigma(t) = \int_T M(t, t_1) \varepsilon(t_1) dt_1$ . On adjoint habituellement aux hypothèses du théorème, l'hypothèse de causalité forte; ce qui réduit le domaine support  $T \times T_1$  au domaine triangulaire  $\Delta = \{(t, t_1), t_1 \leq t\}$ ; le noyau mémoire  $M$  appartient à un sous espace de l'espace des distributions à support dans  $\Delta$ .

<sup>40</sup> Le matériau a une mémoire pour les événements des déformations passées.

<sup>41</sup> On parle de propriétés de non-vieillissement ou de stationnarité, lorsque l'opérateur est invariant par translation dans le temps.

<sup>42</sup> La réponse  $u(t)$  d'un système causal au temps  $t = \tau$  ne dépend que des valeurs de l'entrée  $F(t)$  pour  $t_0 \leq t \leq \tau$ ,  $t_0$  désigne l'instant initial.

<sup>43</sup> Le matériau perd le souvenir de son passé lointain. On parle de distribution mémoire évanescence si pour toute

vont plus loin et définissent les matériaux à mémoire évanescence de façon précise<sup>(44)</sup>. Ils montrent alors que la viscoélasticité linéaire, dans l'hypothèse de petites déformations, se déduit asymptotiquement lorsque les déformations deviennent infiniment petites de la loi de comportement de matériaux très généraux : les milieux matériellement simples à mémoire évanescence.

On peut envisager une classe particulière de matériaux si la distribution mémoire est la combinaison d'une distribution régulière et d'une distribution singulière à l'origine ou mesure de Dirac correspondant à une contribution exceptionnelle du présent : on parle de modèles de deuxième espèce qui prennent une forme généralisant les équations intégrales de deuxième espèce.

Dans le cas d'un matériau viscoélastique linéaire vieillissant, la relation contrainte-déformation<sup>(45)</sup> peut s'écrire sous la forme d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce (cf. ma thèse de doctorat pp. 37-38 [THE2]). Dans celui où le matériau est maintenant non-vieillissant, la relation contrainte-déformation<sup>(46)</sup> s'écrit à l'aide d'un produit de convolution<sup>(47)</sup> défini au sens des distributions :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\gamma}} * \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{r}} * \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$$

où  $\underline{\underline{r}}$  est le tenseur de relaxation qui est formé des réponses indicielles en contraintes et  $\underline{\underline{\gamma}}$  est le tenseur formé des réponses impulsives en contraintes.

Le modèle pour le comportement uniaxial viscoélastique linéaire et vieillissant, le plus général que l'on peut construire à partir de la thermodynamique des processus irréversibles linéaires ou modèle de Biot, est équivalent aux modèles de Kelvin-Voigt ou de Maxwell généralisés, qui sont explicités par la suite, sous réserve que l'on puisse diagonaliser simultanément l'énergie libre et le potentiel de dissipation<sup>(48)</sup>. La distribution mémoire de ce modèle est de deuxième espèce, formée de la distribution singulière de Dirac et d'une distribution régulière admettant une décroissance exponentielle en temps<sup>(49)</sup>. Si au lieu d'une distribution exponentielle décroissante, on choisit un noyau proportionnel au noyau d'Abel  $\iota_\alpha(t)$ <sup>(50)</sup>, il a été montré (cf. ma thèse de doctorat pp. 51-52 [THE2]) que la relation contrainte-déformation s'écrit au moyen de l'opérateur de dérivation d'ordre non entier<sup>(51)</sup> à l'aide de l'exposant non entier  $\alpha$ .

### A.3 Comportements plastique, élasto-plastique et visco-plastique

Dans un essai "classique de traction sur une éprouvette de matériau métallique, la limite d'élasticité franchie, la force de traction axiale provoque des glissements de cristaux au sein du métal, qui correspondent à des déformations irréversibles telles que, si la force cesse, il subsiste une déformation plastique permanente. A température ambiante, les déformations plastiques des matériaux résistants comme l'acier et les alliages métalliques, sont pratiquement indépendantes du temps; les mêmes métaux travaillant à des températures élevées sont soumis à des déformations plastiques qui augmentent avec le temps (phénomène de fluage)<sup>(52)</sup>. On entend habituellement par théorie de la plasticité, la théorie des déformations plastiques indépendantes du

déformation(entrée) dans l'espace des distributions à support borné à gauche (contenu dans  $[0, +\infty[$ ), la contrainte(sortie) est une distribution régulière à support contenu dans  $[0, +\infty[$  et si elle est décroissante à l'infini. Cette hypothèse se traduit par le fait que la valeur absolue de la dérivée de chacune des composantes du tenseur de relaxation (respectivement de fluage) est une fonction décroissante du temps.

<sup>44</sup>Ils introduisent une fonction d'influence ou d'oubli qui est continue, positive, monotone décroissante et de carré intégrable. Dans l'espace des fonctions réelles définies sur  $]0, +\infty[$ , ils choisissent la norme associée au produit scalaire :  $\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(\tau)g(\tau)h^2(\tau)d\tau$ ; ce qui fait de cet espace de fonctions, un espace de Hilbert. La fonctionnelle contrainte-déformation est supposée de classe  $C^1$  et les auteurs effectuent un développement limité au premier ordre suivant la déformation (avec l'utilisation de dérivées directionnelles de Fréchet).

<sup>45</sup>On obtient la formule de Boltzman :  $\sigma_{ij} = r_{ijkl}(M, t) \varepsilon_{kl}(M, t) - \int_0^t \varepsilon_{kl}(M, \tau) \frac{\partial r_{ijkl}(M, \tau, t)}{\partial \tau} d\tau$

<sup>46</sup> $\sigma_{ij}(M, t) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t r_{ijkl}(M, t - \tau) \varepsilon_{kl}(M, \tau) d\tau \right\}$

<sup>47</sup> $\sigma_{ij}(M, t) = \gamma_{ijkl}(M, t) * \varepsilon_{kl}(M, t) = r_{ijkl}(M, t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(M, t)$  où  $r_{ijkl}(M, t)$  est le tenseur de relaxation et  $\gamma_{ijkl}(M, t) = \frac{\partial r_{ijkl}(M, t)}{\partial t}$  et  $*$  désigne le produit de convolution de Riemann. La dérivée est prise au sens des distributions.

<sup>48</sup>Cette restriction est toujours vérifiée lorsque les deux formes quadratiques de l'énergie libre et du potentiel de dissipation sont toutes deux définies positives (même nombre de variables internes dans les deux formes).

<sup>49</sup> $r(t) = E_0 \mathcal{Y}(t) + \int_0^{+\infty} E_1(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$  ou  $\gamma(t) = E_0 \delta(t) - \int_0^{+\infty} \frac{E_1(\tau)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$

<sup>50</sup> $\iota_\alpha(t) = \frac{\mathcal{Y}(t)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}$  où  $\Gamma$  est la fonction Gamma :  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  définie pour de façon générale pour  $x \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(x) > 0$  (si  $x$  est réel, alors  $x > 0$ ).

<sup>51</sup>Si  $r(t) = K \iota_\alpha(t)$  alors  $\sigma(t) = K D^\alpha \langle \varepsilon \rangle(t)$  où  $D^\alpha$  est l'opération de dérivation d'ordre  $\alpha$  qui est définie par la suite.

On a encore :  $\sigma(t) = K \frac{\varepsilon(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} + K D^{\alpha-1} \langle \dot{\varepsilon} \rangle(t)$

<sup>52</sup>Dans un essai de fluage, on mesure l'allongement d'une éprouvette du matériau étudié, en fonction du temps et à une température donnée. Les métaux à haute température "coulent" à la manière d'un liquide visqueux même si la contrainte reste constante. Le phénomène de fluage se traduit par une viscosité qui vient s'ajouter à la plasticité.



temps et l'écoulement plastique qui est fonction du temps est étudié dans la théorie de la viscosité plastique et dans la théorie du fluage<sup>(53)</sup>. La théorie de la plasticité "classique" est très proche de celle de l'élasticité et la plupart des concepts de la théorie de l'élasticité trouvent un usage dans la théorie de la plasticité. Les premiers travaux traitant de la théorie mathématique de la plasticité se rapportent aux années 1870 et sont liés aux noms de Saint-Venant et de M. Lévy. Dans les années qui suivent, le développement de la théorie de la plasticité est plus lent et la publication des articles de Haar et Karman en 1909 puis de Von Mises en 1913 font repartir les recherches dans ce domaine<sup>(54)</sup>.

A partir de 1920, la théorie de la plasticité se développe intensivement avec les premières recherches expérimentales systématiques sur les lois de la déformation plastique aux états de contraintes particuliers, ainsi que les premières applications encourageantes de cette théorie dans le domaine technologique. Citons G. Henky, L. Prandtl, et encore Von Mises qui obtiennent des résultats importants pour les équations fondamentales de la théorie de la plasticité mais aussi la solution du problème plan. Depuis 1930, la théorie de la plasticité suscite l'intérêt de nombreux savants et ingénieurs et devient une branche de la mécanique des milieux continus.

La description des lois de comportement élasto-plastiques et la formulation des équations donnant la réponse dynamique d'un solide élasto-plastique en petite transformation, isotherme, sous l'action des efforts et des liaisons sont connues et couramment enseignées (cf. B. Halphen et J. Salençon<sup>(55)</sup> ou encore par exemple Q-S. Nguyen<sup>(56)</sup>).

La majorité des modèles élasto-plastiques "classiques", en petite transformation, admettent que la déformation est la somme des déformations élastique et plastique et qu'une relation linéaire d'élasticité existe entre la contrainte et la déformation élastiques. Pour compléter la loi de comportement, des relations complémentaires permettent de relier la déformation plastique à l'histoire de la déformation, c'est-à-dire exprimer la contrainte en fonction de l'histoire de la déformation<sup>(57)</sup>. Elles s'obtiennent à travers les notions de critère de plasticité<sup>(58)</sup> et de loi de normalité pour les matériaux standard généralisés.

En élastoplasticité ou en viscoplasticité classiques, les déformations n'intervenant que sous la forme de leur partition  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_p + \underline{\underline{\varepsilon}}_e$  et  $\Psi$  est uniquement fonction de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ , de la température  $T$  et des variables internes  $V^{(m)}$ . En faisant l'hypothèse que les déformations élastiques peuvent se situer à des échelles de temps supérieures à celles qui remettraient en cause l'hypothèse de l'état local et inférieures à celles des phénomènes dissipatifs, le théorème de Clausius-Duhem entraîne les équations locales (ou lois de la thermoélasticité)<sup>(59)</sup> et que la dissipation volumique  $\Phi$ <sup>(60)</sup> est toujours positive ou nulle.

Cependant pour certains matériaux comme par exemple le béton, il devient très difficile de trouver la fonction seuil pour le critère de plasticité.

Une des principales caractéristiques de la plasticité est l'indépendance vis à vis de la vitesse ("rate independent"); c'est-à-dire que l'évolution de la contrainte dépend vraiment de toute l'histoire antérieure de la déformation mais ne dépend pas des vitesses auxquelles ces états de déformation se sont succédés les uns aux autres<sup>(61)</sup>. Avec l'arrivée au LAMI de S. Erlicher en 2002, ma recherche s'est dirigée vers l'étude des matériaux élasto-plastiques et en particulier de la théorie endochronique de l'élastoplasticité.

<sup>53</sup>Une loi simple approchée pour la déformation viscoplastique qui résulte du fluage, valable pour les cas de contrainte variable dans le temps, est la suivante :  $\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^n \varepsilon_p^{-\frac{n}{m}}$  où  $K$ ,  $m$  et  $n$  sont des coefficients intrinsèques au matériau et variables avec la température.

<sup>54</sup>Dans la première de ces deux publications, les auteurs essaient à partir d'un certain principe variationnel, d'obtenir les équations de la théorie de la plasticité. Dans la seconde, Von Mises établit une nouvelle condition pour l'écoulement (condition de stabilité de l'intensité des contraintes tangentielles).

<sup>55</sup>Citons l'ouvrage de référence de Bernard Halphen et Jean Salençon, Élasto-plasticité, Presses des Ponts et Chaussées, 1987.

<sup>56</sup>Citons l'ouvrage : Q-S. Nguyen 2000, Stabilité et mécanique non linéaire. Hermès Science Publications.

<sup>57</sup>Dans le cas d'un chargement croissant uniaxial, la déformation plastique  $\varepsilon_p$  peut être reliée à la contrainte par une relation non linéaire du type :  $\varepsilon_p = \alpha \sigma^m$  ( $\alpha$  et  $m$  étant des constantes intrinsèques au matériau). Dans le cas tridimensionnel, la déformation plastique dépend de l'histoire de chargement et est reliée à la contrainte par une équation différentielle; par exemple, la loi isotrope de Prandtl-Reuss :  $d\varepsilon_p =$

<sup>58</sup>Un état de contrainte appartient donc à un domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes (on suppose que la frontière du domaine est régulière). Cette appartenance s'exprime au moyen d'un critère de plasticité : le domaine est caractérisé par une inégalité :  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$  où la fonction différentiable  $f(\underline{\underline{\sigma}})$  ou fonction seuil, permet de préciser le seuil de plasticité avec  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ .

<sup>59</sup>Les lois de la thermoélasticité sont :  $\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_e}$  ( $= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_p}$ ) et  $s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}$ .

<sup>60</sup>La dissipation volumique est la vitesse de production intérieure d'entropie multipliée par la température. Elle est généralement décomposée en la somme de la dissipation intrinsèque volumique  $\Phi_{int}$  et de la dissipation thermique volumique  $\Phi_{the}$ . On postule souvent que l'on a de façon séparée les inégalités suivantes :  $\Phi_{int} \geq 0$  et  $\Phi_{the} \geq 0$ .

<sup>61</sup>Considérons le cas uniaxial. La relation contrainte-déformation s'exprime à l'aide de l'opérateur mathématique  $\mathcal{A}$  qui relie la contrainte à la déformation :  $\sigma(t) = \mathcal{A}(t; \varepsilon, \sigma_0)$  où  $\sigma_0 = \sigma(t_0)$  et  $t \in [t_0, t_f]$ . La condition d'indépendance par rapport à la vitesse se traduit sur l'opérateur  $\mathcal{A}$  par :  $\mathcal{A}(t; \varepsilon \circ \varphi, \sigma_0) = \mathcal{A}(\varphi(t); \varepsilon, \sigma_0)$  où  $\varphi$  est une fonction admissible c'est-à-dire continue, croissante et telle que  $\varphi(t_0) = t_0$  et  $\varphi(t_f) = t_f$ .

Dans ce qui suit, on s'intéresse au cas d'un comportement isotrope. On trouve dans la littérature une autre modélisation de la plasticité par exemple sans fonction seuil (cf. Valanis<sup>(62)</sup>) qui est à la base de la théorie endochronique<sup>(63)</sup>. Valanis introduit la notion de temps "intrinsèque" ou interne  $\tau$ , différent du temps usuel et qui est relié directement à l'histoire de la déformation du matériau<sup>(64)</sup> par une relation incrémentale. La théorie endochronique permet de relier la viscosité et la plasticité dans une démarche similaire, la viscosité utilisant le temps réel et la plasticité, le temps interne. Il est encore possible de définir la déformation totale comme la somme d'une composante élastique et d'une composante plastique mais le domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes où le comportement est purement élastique, n'existe plus.

La première idée qui vient à l'esprit, dans l'hypothèse de petites déformations, pour définir le temps interne est de choisir une relation incrémentale linéaire :  $d\tau^2 = p_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}$  où  $p_{ijkl}$  sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 défini-positif. La définition d'une nouvelle échelle de temps interne n'est pas unique (par exemple  $p_{ijkl}$  peut dépendre de  $\underline{\varepsilon}$ ). On peut la complexifier pour introduire (1) des phénomènes d'écrouissage ou de radoucissement et/ou (2) des phénomènes de dégradation (on peut citer par exemple, les travaux de Bazant)<sup>(65)</sup>. Erlicher dans son travail de thèse<sup>(66)</sup>, propose un nouveau temps interne  $\tau''$  qui est basé sur le temps interne précédent  $\tau$  et sur l'introduction d'un sous-temps interne supplémentaire  $\tau'$ <sup>(67)</sup> qui doit permettre de gérer une horloge interne pour les problèmes liés à la dégradation du matériau. Finalement, il obtient une relation incrémentale de la forme :  $d\tau'' = f_1(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}) \frac{1}{f_2(\tau')} d\tau$  où les fonctions scalaires  $f_1$  et  $f_2$  sont positives ; la fonction  $f_1$  gère l'enveloppe de la courbe de traction monotone et la fonction  $f_2$  permet d'introduire des effets de chute (mais aussi d'amplification) de la résistance.

Valanis applique ensuite l'approche de la thermodynamique des processus irréversibles linéaire par variables d'état, "classique", en remplaçant le temps habituel des horloges par le temps interne. Le potentiel thermodynamique (par exemple le potentiel énergie libre spécifique) qui dépend des variables observables (le tenseur des déformations ( $\underline{\varepsilon}$  et la température  $T$ ) et des variables internes ( $V^{(m)}$ ) est défini comme une forme quadratique des variables d'état<sup>(68)</sup> avec des relations de type Onsager.

Pour tenir compte du comportement viscoplastique, Valanis élargit sa définition de temps intrinsèque, que l'on note maintenant  $d\zeta$ , en faisant reintervenir, dans sa définition même, le temps réel :  $d\zeta^2 = \alpha^2 d\tau^2 + \beta^2 dt^2$ .

Pour satisfaire des propriétés de comportement observées dans les expériences, Valanis propose d'introduire deux échelles de temps intrinsèques distinctes, respectivement déviatorique et sphérique<sup>(69)</sup>. Lorsque le comportement est uniquement plastique (absence d'effets visqueux), le temps intrinsèque déviatorique suffit ; pour le cas viscoplastique, on fait intervenir les deux temps internes déviatorique  $\zeta_d$  et sphérique  $d\zeta_s$ <sup>(70)</sup>.

Valanis propose ensuite d'appliquer la définition du temps interne non à l'incrément de déformation déviatorique totale mais seulement à une partie de cet incrément que l'on peut faire varier à l'aide d'un paramètre  $k_1 \in [0, 1]$  :  $d\underline{\eta} = d\underline{\varepsilon}' - \frac{k_1}{2G} d\underline{\sigma}'$  où  $G$  est le module de cisaillement du matériau.

<sup>62</sup>K. C. Valanis, 1971, *A theory of visco-plasticity without a yield surface* Part I General theory. Archives of Mechanics **23**(4), pp 517-533.

<sup>63</sup>L'origine du mot endochronique est du grec endon : dedans et du grec khronos : le temps. Le sens en découle : la théorie endochronique postule un temps interne.

<sup>64</sup>Le temps intrinsèque est une fonction qui doit être croissante pour toute évolution de la déformation.

<sup>65</sup>Z. Bazant, 1976, Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 102, No. EM4, pp. 701-722.

<sup>66</sup>Silvano Erlicher, 2003. Hysteresis Degrading Models for the low-cycle fatigue behaviour of structural elements : theory, numerical aspects and applications, Université de Trente, Italie (en anglais).

<sup>67</sup> $d\tau' = q_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}$  où  $q_{ijkl}$  sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 défini-positif.

<sup>68</sup>Dans le cas isotherme, le potentiel thermodynamique  $\Psi$  peut finalement s'écrire :

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \underline{\varepsilon} : \sum_m B^{(m)} : V^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_m V^{(m)} : D^{(m)} : V^{(m)}$$

où les produits tensoriels sont à adapter suivant les dimensions des variables internes.

<sup>69</sup>Ces deux nouveaux temps intrinsèques sont reliés aux notions de tenseurs déviatoriques et sphériques. Ils sont fondés sur l'hypothèse qu'il y a parfait découplage entre les parties déviatorique et sphérique des tenseurs des déformations et des contraintes de Cauchy. On rappelle que le déviateur du tenseur des contraintes (respectivement des déformations) est défini par  $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} tr(\underline{\sigma})$  respectivement  $\underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon} - \frac{1}{3} tr(\underline{\varepsilon})$ .

<sup>70</sup>Le temps interne déviatorique vaut :  $d\zeta_d^2 = \alpha_d^2 d\tau_d^2 + \beta_d^2 dt^2$  ; d'une façon similaire, on obtient pour le temps interne sphérique :  $d\zeta_s^2 = \alpha_s^2 d\tau_s^2 + \beta_s^2 dt^2$ .

## B Quelques modèles rhéologiques linéaires

Dans le domaine de la rhéologie<sup>(71)</sup>, des modèles rhéologiques, constitués d'un assemblage plus ou moins complexe d'éléments rhéologiques élémentaires<sup>(72)</sup> (ressort, amortisseur visqueux, patin) se sont rapidement développés<sup>(73)</sup>. Bien qu'étant très éloignés de la structure réelle du corps étudié, ces modèles sont utiles et encore actuellement, très utilisés dans la formulation de modèles de comportement uniaxial<sup>(74)</sup>. Ils permettent de comprendre directement les phénomènes et satisfont directement les principes de la thermodynamique. La généralisation au milieu tridimensionnel ne pose en général que des difficultés d'ordre mathématique. Cependant, ils ne peuvent donner que des indications qualitatives car ils n'ont pas de relation précise avec la réalité structurale. Pour une vision quantitative, on peut utiliser des équations différentielles. La relation contrainte-déformation la plus "classique" est :  $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ . Pour prendre en compte une relaxation autre qu'instantanée, on peut écrire la relation de comportement sous une forme explicite :  $F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0$ , ce qui permet d'obtenir une meilleure description du comportement mais cette relation reste tout de même, une approximation. On peut alors introduire dans la relation de comportement des dérivées par rapport au temps d'ordre supérieur à 1. Les modèles rhéologiques un peu plus complexes que les modèles de base comme le modèle de Kelvin-Voigt, comme par exemple, le modèle de Zener, renferme une ou plusieurs variables cachées et l'élimination des variables cachées conduit à des équations différentielles dont l'ordre croît avec le nombre de ces variables. Lorsque le nombre de variables cachées augmente, l'ordre des équations différentielles augmente en proportion et il devient préférable de chercher une autre représentation. La représentation par une fonctionnelle (Volterra) où chacune des variables est une fonctionnelle des valeurs de l'autre variable entre  $-\infty$  et l'instant actuel  $t$  est alors la représentation la plus rigoureuse des relations de comportement. Dans ce qui suit, on limite notre exposé aux modèles rhéologiques linéaires. Les principales fonctions caractéristiques de ces modèles sont : (1) l'équation différentielle de la loi de comportement ainsi que le nombre de paramètres (N. P.) qui interviennent dans cette loi, (2) la fonction de relaxation et sa dérivée<sup>(75)</sup>, (3) la fonction de fluage, (4) le module opérationnel<sup>(76)</sup>, (5) le facteur de qualité<sup>(77)</sup>, (6) l'énergie dissipée au cours d'un cycle de déformation<sup>(78)</sup>, (7) le coefficient de viscosité équivalent<sup>(79)</sup> et (8) le coefficient ou facteur de perte<sup>(80)</sup>.

<sup>71</sup>La rhéologie (du grec "rhéon" qui veut dire s'écouler) a été proposée par E.C. Bingham, en 1928, pour désigner "la science qui étudie les déformations et l'écoulement de la matière". Plus précisément, l'objet de la rhéologie est l'étude du comportement mécanique, c'est-à-dire des relations entre les déformations et les contraintes de la matière. Les études en rhéologie se situent sur trois voies : (1) recherche expérimentale sur les matériaux réels, (2) étude théorique des diverses lois de comportement (étude macroscopique) et (3) examen de la structure à différentes échelles : molécules, réseau cristallin, grains (étude microscopique). L'identification des matériaux fait le lien entre les voies (1) et (2).

<sup>72</sup>Le solide de Hooke par opposition au solide indéformable ou solide d'Euclide se déforme linéairement avec la contrainte ; il se représente par un ressort (*élasticité*). Un autre solide idéal, représenté par un patin, est qualifié de rigide-plastique (*plasticité*). Le liquide de Newton par opposition au liquide de Pascal qui est parfaitement mobile et incompressible, est caractérisé par une proportionnalité entre la contrainte et la vitesse de déformation (*viscosité*) ; il est représenté par un amortisseur ou dash-pot. Ces trois sortes de propriétés sont habituellement associées pour représenter de nombreux comportements réels.

<sup>73</sup>Citons l'ouvrage des monographies du centre d'actualisation scientifique et technique : B. Persoz, 1969, "La rhéologie", N. 3, Edts Masson.

<sup>74</sup>Pour englober toute la variété des propriétés des matériaux réels, on utilise souvent la description à un paramètre, où une contrainte unidimensionnelle représentative  $\sigma$  est relié à la déformation  $\varepsilon$  ou à la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  unidimensionnelles correspondantes. Cette contrainte peut être une traction ou une cisssion pour les corps peu déformables ; elle est de préférence une cisssion pour les corps très déformables.

<sup>75</sup>La fonction de relaxation, notée  $r(t)$  est la réponse indicelle en contrainte :  $\sigma(t) = r(t) * \dot{\varepsilon}(t)$ . Sa dérivée notée  $\gamma(t)$  est la réponse impulsionnelle en contrainte :  $\sigma(t) = \gamma(t) * \varepsilon(t)$  (le produit de convolution étant défini au sens des distributions).

<sup>76</sup>Le module opérationnel  $\Gamma(p)$  est défini comme la transformée de Laplace de la dérivée temporelle  $\dot{r}(t)$  de la fonction de relaxation ou encore comme la transformée de Carson de la fonction de relaxation  $r(t)$ . Le seuil de convergence de  $\Gamma(p)$  est strictement négatif pour les modèles viscoélastiques linéaires ; on introduit alors le module complexe  $M(\omega)$  en remplaçant  $p$  par  $i\omega$  :  $M(\omega) = \Gamma(p = i\omega)$ .

<sup>77</sup>Le facteur de qualité (ou de surtension)  $Q(\omega)$  est un paramètre sans dimension, fonction de  $\omega$  et défini comme le rapport de la partie réelle sur la partie imaginaire du module complexe :  $Q(\omega) = \frac{\Re\{M(\omega)\}}{\Im\{M(\omega)\}}$ .

<sup>78</sup>Si on impose à  $\varepsilon$  une variation périodique en fonction du temps, alors au bout d'un certain temps, soit la rupture s'est produite, soit  $\sigma$  est devenue une fonction périodique du temps. Dans le plan contrainte-déformation, on obtient une boucle d'hystérésis en général fermée et l'aire de cette boucle représente l'énergie dissipée au cours d'un cycle de déformation  $\Delta W$  :  $\Delta W = \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon} dt$  où  $T$  désigne la période. Pour un matériau viscoélastique linéaire,  $\Delta W$  est proportionnel à la partie imaginaire du module complexe :  $\Delta W = \pi \varepsilon_m^2 \Im\{M(\omega)\}$  où  $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin(\omega t)$ .

<sup>79</sup>Le coefficient de viscosité équivalent  $\eta_{eq}$  est calculé pour dissiper pendant un cycle sous vibration sinusoïdale de la déformation, la même quantité d'énergie que le modèle proposé (généralement non linéaire) :  $\int_{cycle} [\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) - \eta_{eq} \dot{\varepsilon} - E_{eq} \varepsilon] \dot{\varepsilon} dt = 0$  et donc  $\eta_{eq} = \frac{\Delta W}{\pi \omega \varepsilon_m^2}$ .

<sup>80</sup>Le coefficient ou facteur de perte  $\varsigma$  est défini comme le rapport de l'énergie dissipée au cours d'un cycle à l'énergie potentielle maximum multipliée par  $2\pi$  :  $\varsigma = \frac{\Delta W}{2\pi V_{max}}$ . Les valeurs de  $\varsigma$  pour les matériaux usuels du génie civil sont comprises entre  $10^{-5}$  et  $10^{-1}$ . Pour l'aluminium pur :  $2 \cdot 10^{-5} \leq \varsigma \leq 0.002$ , pour l'acier :  $0.001 \leq \varsigma \leq 0.008$ , pour le béton :  $0.01 \leq \varsigma \leq 0.06$  et pour le caoutchouc naturel  $0.1 \leq \varsigma \leq 0.3$ . Si le facteur de qualité  $Q$  est relativement grand, on a :  $V_{max} \simeq \frac{1}{2} \varepsilon_m^2 \Re\{M(\omega)\}$  et comme



## B.1 Les modèles linéaires “élémentaires”

Les modèles rhéologiques linéaires classiques sont respectivement le ressort pour le comportement purement élastique et les modèles de Kelvin-Voigt et de Zener pour le comportement viscoélastique linéaire.

Les principales fonctions caractéristiques pour le ressort et les modèles de Kelvin-Voigt et de Zener sont données dans le tableau (2.1). Le ressort est de module  $E$ . On rappelle que le modèle de Kelvin-Voigt est constitué d’un ressort de module  $E$  et d’un amortisseur de viscosité  $\eta$  en parallèle. Le modèle de Zener est constitué d’un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres  $(E_1 \text{ et } \eta)$  auquel on rajoute un ressort en série de module  $E_0$ .<sup>(81)</sup> Pour faciliter l’écriture et aussi la lecture, on introduit habituellement un paramétrage différent : pour le modèle de Kelvin-Voigt, deux nouveaux paramètres :  $\tau = \frac{\eta}{E}$  et  $J = \frac{1}{E}$  et pour le modèle de Zener, cinq nouveaux paramètres :  $E_\infty = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$ ,  $\tau_\infty = \frac{\eta}{E_0 + E_1}$ ,  $\tau_0 = \frac{\eta}{E_1}$ ,  $J_\infty = \frac{1}{E_\infty}$  et  $J_1 = \frac{1}{E_1}$ .  $\delta(t)$  et  $\mathcal{Y}(t)$  sont respectivement la distribution de Dirac et celle de Heaviside. Dans l’expression de la fonction  $\gamma(t)$ , pour le modèle de Kelvin-Voigt, apparaît la dérivée de la distribution de Dirac qui est définie au sens des distributions par :  $\langle \dot{\delta}, \varphi \rangle = -\dot{\varphi}(0)$  où  $\varphi(t)$  est une fonction test indéfiniment dérivable, à support borné.

## B.2 Les modèles linéaires avec amortissement hystérétique et fractionnaire

A partir de considérations thermodynamiques, Biot puis, Mandel ont montré que n’importe quel corps viscoélastique linéaire peut être représenté par un groupement en séries d’un nombre infini de modèles de Kelvin-Voigt :  $(E_m, \eta_m)$ , d’un amortisseur visqueux<sup>(82)</sup> :  $\eta_\infty$  et d’un ressort :  $E_0$ . Ce modèle s’appelle le modèle de Kelvin-Voigt généralisé<sup>(83)</sup>. L’application de ces modèles aux cas réels nécessite un nombre important de paramètres à identifier pour décrire correctement le phénomène réel. Des modèles ayant un petit nombre de paramètres ont donc été recherchés en se fondant sur des considérations expérimentales. Ainsi, d’une part, des essais expérimentaux sur une grande variété de matériaux viscoélastiques ont montré que la rigidité et l’amortissement dans ces matériaux sont proportionnels à une puissance fractionnaire de la fréquence. D’autre part, de nombreux essais en contraintes cycliques ont prouvé que pour plusieurs matériaux viscoélastiques, l’énergie dissipée au cours d’un cycle ne dépend pas linéairement de la fréquence mais est, au premier ordre près, indépendante de la fréquence et proportionnelle au carré de l’amplitude de déformation<sup>(84)</sup>. Il existe dans la littérature deux familles de modèles de comportement viscoélastique linéaire qui tentent de satisfaire aux propriétés de comportement mises en évidence par l’expérience : les modèles utilisant le calcul fractionnaire et les modèles d’amortissement hystérétique. Nous allons voir dans ce qui suit, comment ces deux modèles peuvent être reliés.

Le modèle avec amortissement hystérétique (on trouve parfois la terminologie d’amortissement structural) a été imaginé pour répondre aux considérations expérimentales citées précédemment sur l’énergie dissipée au cours d’un cycle. Il est donc fondamentalement associé à la contrainte cyclique. Son extension à des sollicitations autres qu’harmoniques posent des problèmes importants en particulier de non-respect du principe de causalité. Récemment, Makris<sup>(85)</sup> propose une formulation pour le modèle hystérétique causal. Ce modèle possède la même partie imaginaire que le modèle d’amortissement hystérétique idéal et sa partie réelle est construite pour le rendre causal à l’aide des relations de Kramers-Kronig<sup>(86)</sup>.

---

$\Delta W = \pi \varepsilon_m^2 \Im \{M(\omega)\}$ , on obtient que :  $\varsigma \simeq \frac{1}{Q}$ .

<sup>81</sup>Les variables d’état sont au nombre de deux : la déformation totale  $\varepsilon$  et par exemple, la déformation dans le ressort  $E_1$  que l’on note  $V^{(1)} = \varepsilon_1$ . La force et le flux thermodynamique sont respectivement :  $Y_1$  et  $y_1 = -\dot{V}^{(1)} = -\dot{\varepsilon}_1$ . L’énergie libre volumique s’écrit :  $\Psi(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} E_0 (\varepsilon - \varepsilon_1)^2$ . On peut ensuite dériver les lois d’état du milieu :  $\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E_0 (\varepsilon - \varepsilon_1)$  et  $Y_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1} = E_1 \varepsilon_1 - E_0 (\varepsilon - \varepsilon_1)$ . Le potentiel de dissipation intrinsèque est :  $\Phi_{int} = \sigma \dot{\varepsilon} - \frac{d\Psi}{dt} = \sigma \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1} \dot{\varepsilon}_1 = -X_1 \dot{\varepsilon}_1$ . Le pseudo-potential de dissipation  $\Omega(y_1)$  fonction du flux est égal à :  $\Omega(y_1) = \Omega(-\dot{\varepsilon}_1) = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}_1^2$ . Les lois complémentaires donnent :  $Y_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}_1} = -\eta \dot{\varepsilon}_1$ . Les lois d’état, combinées aux lois complémentaires nous permettent alors de déterminer l’évolution du système en fonction de la grandeur commandée  $\sigma$  ou  $\varepsilon$ . Si l’on choisit  $\varepsilon$ , on obtient :  $E_1 \varepsilon_1 - E_0 (\varepsilon - \varepsilon_1) = -\eta \dot{\varepsilon}_1$  et  $\sigma = E_0 (\varepsilon - \varepsilon_1)$ .

<sup>82</sup>Dans le cas d’un comportement de type solide, l’amortisseur en série n’existe pas :  $\eta_\infty = \infty$ .

<sup>83</sup>Pour le modèle de Kelvin-Voigt généralisé, la fonction de fluage vaut :

$$j(t) = \left\{ J_0 + \sum_m J_m \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right) + \frac{t}{\eta_\infty} \right\} \mathcal{Y}(t) \text{ où } J_0 = \frac{1}{E_0}, J_m = \frac{1}{E_m} \text{ et } \tau_m = J_m \eta_m \text{ est un temps de retard. La complaisance}$$

complexe qui est l’inverse du module complexe vaut :

$$J^*(\omega) = J_0 + \sum_m \frac{J_m}{1 + \omega^2 \tau_m^2} - i \omega \sum_m \frac{J_m \tau_m}{1 + \omega^2 \tau_m^2} - i \frac{1}{\omega \eta_\infty}.$$

<sup>84</sup>Pour un matériau viscoélastique linéaire, cela revient à dire que la partie imaginaire du module complexe est une constante :  $\Im \{M(\omega)\} = Cste$ .

<sup>85</sup>N. Makris, 1997, Causal hysteretic element. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 129, pp. 1209-1214.

<sup>86</sup>Les relations de Kramers Kronig permettent de relier les parties réelle  $\Re \{M(\omega)\}$  et imaginaire  $\Im \{M(\omega)\}$  du module complexe  $M(\omega)$  :  $\Re \{M(\omega)\} = M_0 + \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Im \{M(\alpha)\}}{\alpha} \frac{d\alpha}{\omega^2 - \alpha^2}$  et  $\Im \{M(\omega)\} = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty (\Re \{M(\alpha)\} - M_0) \frac{d\alpha}{\omega^2 - \alpha^2}$  où  $M_0 = M(0)$

	ressort	Kelvin-Voigt	Zener
N. P.	<b>1</b> ( $E$ )	<b>2</b> ( $E$ et $\eta$ )	<b>3</b> ( $E_0, E_1$ et $\eta$ )
L.C.	$\sigma = E\varepsilon$	$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$	$\sigma + \tau_\infty\dot{\sigma} = E_\infty\varepsilon + E_0\tau_\infty\dot{\varepsilon}$
$\Gamma(p)$	$E$	$E + \eta p$	$E_\infty \frac{1+\tau_0 p}{1+\tau_\infty p}$
$r(t)$	$E\mathcal{Y}(t)$	$E\mathcal{Y}(t) + \eta\delta(t)$	$\left[ E_\infty + (E_0 - E_\infty) \exp\left(\frac{-t}{\tau_\infty}\right) \right] \mathcal{Y}(t)$
$\gamma(t)$	$E\delta(t)$	$E\delta(t) + \eta\dot{\delta}(t)$	$\frac{E_0\delta(t)}{-\frac{E_0-E_\infty}{\tau_\infty} \exp\left(\frac{-t}{\tau_\infty}\right)} \mathcal{Y}(t)$
$j(t)$	$\frac{1}{E}\mathcal{Y}(t)$	$J \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \mathcal{Y}(t)$	$\left[ J_\infty - J_1 \exp\left(\frac{-t}{\tau_0}\right) \right] \mathcal{Y}(t)$
$Q(\omega)$	$\infty$	$\frac{E}{\eta\omega}$	$\frac{1+\tau_\infty\tau_0\omega^2}{\omega(\tau_0-\tau_\infty)}$
$\Delta W$	0	$\pi\eta\omega\varepsilon_m^2$	$\pi E_\infty\omega \frac{\tau_0-\tau_\infty}{1+\tau_\infty^2\omega^2} \varepsilon_m^2$
$\eta_{eq}$	0	$\eta$	$E_\infty \frac{\tau_0-\tau_\infty}{1+\tau_\infty^2\omega^2}$
$\varsigma$	0	$\frac{\eta\omega}{E}$	$Q^{-1} \frac{2}{1+D}$

**Tab. 2.1** Fonctions caractéristiques des modèles rhéologiques : ressort, Kelvin-Voigt et Zener

Les modèles utilisant des dérivées fractionnaires permettent de représenter la dissipation avec moins de paramètres que les modèles de Maxwell ou de Kelvin-Voigt généralisés. Le spring-pot est le modèle de base pour les modèles de comportement uniaxial s'appuyant sur le calcul fractionnaire. Il permet à l'aide d'un paramètre adimensionnel  $\alpha$  compris entre 0 et 1 d'assurer une transition continue entre le modèle solide idéal (ressort ou "spring" :  $\alpha = 0$ ) et le modèle fluide idéal (amortisseur visqueux ou "dash-pot" :  $\alpha = 1$ ). La relation contrainte-déformation pour le spring-pot s'écrit :

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha < \varepsilon > (t) \quad (2.1)$$

où  $D^\alpha < \cdot >^{(87)}$  désigne l'opérateur de dérivation fractionnaire et  $\tau$  est un temps caractéristique; on peut poser :  $\tau = \frac{1}{\omega_\varepsilon}$ . Pour les applications qui nous intéressent :  $\varepsilon(t)$  est une fonction causale et  $0 < \alpha < 1$ , la dérivation non entière s'exprime alors pour une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et telle que  $f(0) = 0$  par :

$$D^\alpha < f > (t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \right\} \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{f}(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

où l'on voit intervenir le noyau d'Abel  $i_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \mathcal{Y}(t)$ . Le module opérationnel correspondant est :  $\Gamma(p) = E\tau^\alpha p^\alpha$  et le module complexe s'en déduit :  $M(\omega) = E\tau^\alpha (i\omega)^\alpha = E\tau^\alpha \omega^\alpha e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$ . Les modèles utilisant les dérivées d'ordre fractionnaire ont dans la représentation temporelle, une formulation intégrale peu commode d'emploi. Dans l'étude d'un modèle spring-pot + une masse, la fonction de transfert s'écrit :  $H(p) = \frac{1}{m p^2 + E\tau^\alpha p^\alpha}$ . Il a été proposé dans ma thèse (cf. [THE2]), une nouvelle formulation pour le modèle hystérétique causal en l'identifiant, pour un faible amortissement, avec le modèle obtenu par le développement au premier ordre suivant  $\alpha$  du modèle spring-pot au voisinage de  $\alpha = 0$ . Le module opérationnel vaut alors :

$$\Gamma(p) = E \{1 + \alpha \ln(\tau p)\} \quad (2.4)$$

Le module complexe s'en déduit :

$$M(\omega) = E \left\{ 1 + \alpha \ln \left| \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right| + i\alpha \frac{\pi}{2} \text{sign} \left( \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right) \right\} \quad (2.5)$$

La partie réelle du module complexe est positive; ce qui entraîne que  $\omega > \omega_\varepsilon e^{-\frac{1}{\alpha}}$ . On obtient ensuite la fonction de relaxation à partir de la relation (2.4)

$$r(t) = E \left\{ 1 - \alpha \ln \left( \frac{|t|}{t_1} \right) \right\} \mathcal{Y}(t) \quad (2.6)$$

où  $t_1 = \tau e^{-C}$ ,  $C$  désignant la constante d'Euler<sup>(88)</sup>. On note que  $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$  et que  $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$ . La fonction de relaxation doit être une fonction positive, ce qui entraîne que :  $t < t_1 e^{\frac{1}{\alpha}} = \tau e^{-C + \frac{1}{\alpha}}$ . On note que les expressions obtenues pour le module complexe et la fonction de relaxation de ce modèle ne sont pas valables partout. A partir de l'expression de  $r(t)$ , on peut en déduire l'expression de la loi de comportement de ce modèle :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - E\alpha \int_0^t \ln \left( \frac{t-u}{t_1} \right) \dot{\varepsilon}(u) du \quad (2.7)$$

On peut ensuite écrire la fonction de relaxation sous la forme d'une superposition continue d'exponentielles :

$$r(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{E}(z) e^{-\frac{t}{z}} dz \quad \text{avec} \quad \tilde{E}(z) = \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)z^{\alpha+1}}$$

où  $\tilde{E}(z)$  désigne le spectre de relaxation. Par ce résultat, un élément spring-pot peut être interprété comme une superposition continue d'éléments de Maxwell en parallèle avec les distributions de modules et de viscosités donnés par  $\tilde{E}(z) dz$  et  $z\tilde{E}(z) dz$  respectivement.

<sup>87</sup>La différentiation fractionnaire d'une fonction  $f(t)$  est définie par :

$D^\alpha < f > (t) = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_c^t (t-\tau)^{\rho-1} f(\tau) d\tau \right\}$  avec  $\alpha = m - \rho$  où  $m$  est le plus petit entier naturel supérieur à  $\alpha$ . On obtient deux définitions suivant que  $c = 0$  (définition de Riemann) et  $c = -\infty$  définition de Liouville.

<sup>88</sup>La transformée de Laplace de  $\ln(t)$  est :  $\frac{-\ln(p)-C}{p}$  où  $C = 0.577216$  est la constante d'Euler.

Le calcul de  $\gamma(t)$ , dérivée de la fonction de relaxation s'obtient grâce à la dérivée au sens des distributions de  $\ln|t| \mathcal{Y}(t)$  qui est : p.f.  $\{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\}$  où p.f. désigne la pseudo-fonction<sup>(89)</sup>. On a finalement :

$$\gamma(t) = E \left\{ (1 + \alpha \ln(t_1)) \delta(t) - \alpha \text{p.f.} \left\{ \frac{1}{t} \mathcal{Y}(t) \right\} \right\} \quad (2.8)$$

Pour trouver la fonction de fluage à partir du module opérationnel<sup>(90)</sup>, on obtient :

$$T.L. \{j\}(p) = \frac{1}{E p \{1 + \alpha \ln(\tau p)\}} \quad (2.9)$$

qui est égale à la dérivée de :  $F(p) = \frac{1}{E\alpha} \ln(1 + \alpha \ln(\tau p))$ . Si  $f(t)$  est l'original de Laplace de  $F(p)$ , alors  $j(t) = -t f(t)$ . Posons  $g(t) = \tau f(\tau t)$  qui est l'original de Laplace de  $G(p) = F\left(\frac{p}{\tau}\right) = \frac{1}{E\alpha} \ln(1 + \alpha \ln(p))$ ; on a alors :  $j(\tau t) = -\tau t f(\tau t) = -t g(t)$ .

Si on peut utiliser le développement en série de  $\ln(1+x)$ <sup>(91)</sup>, en se limitant aux deux premiers termes du développement on obtient :  $G(p) = \frac{1}{E} (\ln(p) - \frac{\alpha}{2} \ln(p)^2)$ . En notant  $f_1(t)$ <sup>(92)</sup> l'original de Laplace de  $\ln(p)$  et  $f_2(t)$ <sup>(93)</sup> l'original de  $\ln(p)^2$ , on obtient :  $g(t) = \frac{1}{E} (f_1(t) - \frac{\alpha}{2} f_2(t))$ <sup>(94)</sup> et  $j(\tau t) = \frac{1}{E} \{1 + \alpha (-C + \ln|t|)\} \mathcal{Y}(t)$ ; en posant  $C = \ln \frac{t_1}{\tau}$ , on trouve<sup>(95)</sup> :

$$j(t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \alpha \ln \frac{|t|}{t_1} \right\} \mathcal{Y}(t) \quad (2.10)$$

L'énergie dissipée au cours d'un cycle de déformation  $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin(\omega t)$ , s'exprime à l'aide de la relation générale pour les matériaux viscoélastiques linéaires :  $\Delta W = \pi \varepsilon_m^2 \Im \{\Gamma(\omega)\}$ ; soit dans le cas présent :

$$\Delta W = \pi \varepsilon_m^2 E \alpha \frac{\pi}{2} \text{sign} \left( \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right) \quad (2.11)$$

On note que pour des pulsations positives,  $\Delta W$  est indépendante de  $\omega$  et proportionnelle à  $\varepsilon_m^2$ ; ce qui permet de rapprocher ce modèle pour ce qui concerne sa partie dissipative avec le modèle d'amortissement non linéaire dit de Reid dont la loi de comportement est :  $\sigma = \frac{\alpha'}{2} |\varepsilon| \text{sign}(\dot{\varepsilon})$  et dont l'énergie dissipée  $\Delta W_{Reid} = \alpha' \varepsilon_m^2$  est proportionnelle à  $\varepsilon_m^2$ .

On s'intéresse ensuite au facteur de qualité  $Q(\omega)$ ; on déduit de la relation (2.5) :

$$Q(\omega) = \left\{ \frac{2}{\alpha\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left| \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right| \right\} \text{sign} \left( \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right) \quad (2.12)$$

Si on se limite au premier terme de l'expression précédente, on note que le facteur de qualité est alors pour des pulsations positives une constante :  $Q(\omega) = \frac{2}{\alpha\pi}$ .

Makris retrouve les mêmes équations en rendant causal le modèle hystérétique idéal. On peut généraliser cette idée de développement au premier ordre suivant  $\alpha$  de toutes les expressions

Le tableau (2.2) présente pour le spring-pot qui est le modèle de base des modèles aux dérivées fractionnaires et le modèle hystérétique causal les fonctions caractéristiques comme dans le tableau précédent (2.1). On note que pour le spring-pot  $\alpha$  est un réel compris entre 0 et 1 et que pour le modèle hystérétique causal,  $\tau = \frac{1}{\omega_\varepsilon}$  et un nouveau paramètre est introduit :  $t_1 = \tau e^{-C}$  où  $C$  est la constante d'Euler ( $C = 0.577216$ ). On rappelle que  $\delta(t)$  et  $\mathcal{Y}(t)$  sont respectivement la distribution de Dirac et celle de Heaviside.

<sup>89</sup>Le calcul de la dérivée au sens des distributions de  $\ln|t| \mathcal{Y}(t)$  s'effectue par :  $\langle (\ln|t| \mathcal{Y}(t))', \varphi(t) \rangle = - \langle \ln|t| \mathcal{Y}(t), \varphi'(t) \rangle = - \int_0^{+\infty} \ln|t| \varphi'(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \log(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \log(\varepsilon) \delta_\varepsilon(t) + \frac{1}{t} \mathbb{I}_{[\varepsilon, +\infty[}(t), \varphi(t) \right\rangle$ .

<sup>90</sup>on sait que la transformée de Laplace de la fonction de fluage est  $T.L. \{j\}(p) = \frac{1}{p \Gamma(p)}$ .

<sup>91</sup>Le développement en série de la fonction  $\ln(1+x)$  au voisinage de 0 (rayon de convergence  $R = 1$ ) est :  $\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i}$ .

<sup>92</sup>Au vu de la note 88,  $f_1(t)$  est la dérivée au sens des distributions de  $(-C - \ln|t|) \mathcal{Y}(t)$ . On rappelle que la dérivée au sens des distributions de  $\ln|t| \mathcal{Y}(t)$  est : p.f.  $\{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(\varepsilon) \delta_\varepsilon(t) + \frac{1}{t} \mathbb{I}_{[\varepsilon, +\infty[}(t)$  où p.f. désigne la pseudo-fonction (cf note 89). On montre alors aisément que :  $t \cdot \text{p.f.} \{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\} = \mathcal{Y}(t)$ . Finalement, on a :  $f_1(t) = -C \delta(t) - \text{p.f.} \{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\}$ .

<sup>93</sup> $f_2(t) = f_1(t) * f_1(t) = C^2 \delta(t) - 2C \text{p.f.} \{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\} + \frac{2}{t} \ln|t| \mathcal{Y}(t)$ . En effet :  $\text{p.f.} \{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\} * \text{p.f.} \{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\} = \frac{2}{t} \ln|t| \mathcal{Y}(t)$ .

<sup>94</sup> $g(t) = \frac{1}{E} \{(-C - \frac{\alpha}{2} C^2) \delta(t) + (-1 + C\alpha) \text{p.f.} \{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\} - \frac{\alpha}{t} \ln|t| \mathcal{Y}(t)\}$  et  $-t g(t) = \frac{1}{E} \{1 + \alpha (-C + \ln|t|)\} \mathcal{Y}(t)$

<sup>95</sup>Cette relation se déduit aisément de :  $j(\tau t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \alpha \ln \frac{\tau|t|}{t_1} \right\} \mathcal{Y}(t)$ .

	spring-pot	hystérétique causal
N. P.	<b>3</b> ( $E, \tau$ et $\alpha$ )	<b>3</b> ( $E, \tau$ et $\alpha$ )
L.C.	$\sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha \{\varepsilon\}(t)$ $= \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$	$\sigma(t) = E\varepsilon(t)$ $-E\alpha \int_0^t \ln\left(\frac{t-u}{t_1}\right) \dot{\varepsilon}(u) du$
$\Gamma(p)$	$E\tau^\alpha p^\alpha$	$E(1 + \alpha \ln(\tau p))$
$r(t)$	$E \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha} \mathcal{Y}(t)$	$E \left(1 - \alpha \ln\left(\frac{t}{t_1}\right)\right) \mathcal{Y}(t)$
$\gamma(t)$	$E\tau^\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1}{t^\alpha} \delta(t) - \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \mathcal{Y}(t)\right]$	$E[(1 + \alpha \ln(t_1)) \delta(t) - \alpha \text{p.f.} \left\{\frac{1}{t} \mathcal{Y}(t)\right\}]$
$j(t)$	$\frac{1}{E} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \mathcal{Y}(t)$	$\frac{1}{E} \left(1 + \alpha \ln\left(\frac{t}{t_1}\right)\right) \mathcal{Y}(t)$
$Q(\omega)$	$\cotan\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \text{sgn}(\omega)$	$\frac{2}{\alpha\pi} \text{sgn}(\omega)$
$\Delta W$	$\pi E\tau^\alpha \omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \varepsilon_m^2$	$E\pi^2 \frac{\alpha}{2} \text{sgn}(\omega) \varepsilon_m^2$
$\eta_{eq}$	$\frac{E\tau^\alpha}{\omega^{1-\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right)$	$E \frac{\pi}{2\omega} \alpha \text{sgn}(\omega)$
$\varsigma$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \text{sgn}(\omega)$	$\frac{\pi}{2} \alpha \text{sgn}(\omega)$

**Tab. 2.2** Fonctions caractéristiques du modèle rhéologique du spring-pot et du modèle hystérétique causal

### B.3 D'autres modèles linéaires plus élaborés

En recherchant à modéliser le frottement solide, Biot<sup>(96)</sup> propose un modèle pour la friction solide de telle sorte que la partie imaginaire du module complexe soit proche d'une quantité indépendante de la fréquence. On obtient pour le module opérationnel :

$$\Gamma(p) = E \left\{ 1 + \alpha \ln \left( 1 + \frac{p}{\omega_\varepsilon} \right) \right\} \quad (2.13)$$

et ensuite pour le module complexe :

$$M(\omega) = E \left\{ 1 + \alpha \ln \left( 1 + i \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right) \right\} \quad (2.14)$$

$$= E \left\{ 1 + \alpha \ln \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right)^2} + i \alpha \arctan \left( \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right) \right\} \quad (2.15)$$

Lorsque  $\omega_\varepsilon$  tend vers zéro, l'écriture du modèle hystérétique causal et celle du modèle de Biot sont équivalentes. Biot précise que si de plus,  $\alpha$  est faible, alors les parties réelle et imaginaire du module complexe sont "presque" constantes sur une large plage de fréquence.

La fonction de relaxation se déduit de la relation 2.13 :

$$r(t) = E \{ 1 + \alpha E_1(\omega_\varepsilon t) \} \mathcal{Y}(t) \quad (2.16)$$

où  $E_1(\cdot)$  désigne l'intégrale exponentielle<sup>(97)</sup> ; relation que l'on peut encore écrire :

$$r(t) = E \left\{ 1 - \alpha C - \alpha \ln |\omega_\varepsilon t| - \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\omega_\varepsilon t)^n}{n n!} \right\} \mathcal{Y}(t)$$

On note que  $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$  et que  $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} E$ . On déduit ensuite la fonction  $\gamma(t)$ <sup>(98)</sup> :

$$\gamma(t) = E \left\{ \delta(t) - \alpha \frac{e^{-\omega_\varepsilon t}}{t} \mathcal{Y}(t) \right\} \quad (2.17)$$

Si on examine ce modèle de plus près, on remarque que le module peut être vu comme le développement limité à l'ordre 1, suivant  $\alpha$ , du module complexe  $\tilde{M}(\omega)$  suivant :

$$\tilde{M}(\omega) = E \left( 1 + i \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right)^\alpha = E e^{\alpha \left\{ \ln \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right)^2} + i \arctan \left( \frac{\omega}{\omega_\varepsilon} \right) \right\}} \quad (2.18)$$

Le module opérationnel associé à  $\tilde{M}(\omega)$  s'écrit :  $\tilde{\Gamma}(p) = E \tau^\alpha (\omega_\varepsilon + p)^\alpha$  ; on remarque que  $\tilde{\Gamma}(p)$  est une version du module opérationnel du spring-pot que l'on note  $\Gamma(p)$ , translatée de  $\omega_\varepsilon$ . On a donc  $\forall p : T.L. \{ \tilde{\gamma}(t) \} (p) = T.L. \{ \gamma(t) \} (p + \omega_\varepsilon) = T.L. \{ \gamma(t) e^{-\omega_\varepsilon t} \} (p)$  ; ce qui entraîne :  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) e^{-\omega_\varepsilon t}$  et finalement  $\tilde{\gamma}(t) = E \tau^\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{1}{t^\alpha} \delta(t) - \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \mathcal{Y}(t) \right] e^{-\omega_\varepsilon t}$ . On note que  $\forall t > 0 : \tilde{\gamma}(t) < \gamma(t)$  et que la décroissance de la fonction  $\tilde{\gamma}(t)$  est accélérée lorsque le temps tend vers  $+\infty$ , traduisant un matériau avec une mémoire "plus rapidement" évanescence. Si on revient au modèle de Biot, on déduit que l'on peut voir sa fonction gamma comme la fonction gamma du modèle hystérétique causal multipliée par  $e^{-\omega_\varepsilon t}$  soit :  $E \left\{ \left( 1 - \alpha \ln \left( \frac{t}{t_1} \right) \right) e^{-\omega_\varepsilon t} \delta(t) - \frac{\alpha}{t} e^{-\omega_\varepsilon t} \mathcal{Y}(t) \right\}$ .

Finalement, le tableau (2.3) donne les mêmes fonctions caractéristiques pour les deux modèles "classiques" utilisant les dérivées fractionnaires à savoir les modèles de Kelvin-Voigt et de Zener fractionnaires qui sont obtenus respectivement à partir des modèles de Kelvin-Voigt et de Zener en remplaçant l'élément visqueux (dash-pot) par l'élément spring-pot. On note que  $\alpha$  est un réel compris entre 0 et 1.  $\mathcal{M}_\alpha$  est la fonction de Mittag-Leffler :  $\mathcal{M}_\alpha [x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}$ .  $\mathcal{Y}(t)$  est la distribution de Heaviside. Pour le modèle de Zener,

<sup>96</sup>M.-A. Biot. Linear thermodynamics and the mechanics of solids. In Proc. 3rd US Natl. Congress in Applied Mechanics ASME, pp. 1-18, 1958.

<sup>97</sup>L'intégrale exponentielle  $E_1(\cdot)$  est définie par :  $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$  pour  $x \geq 0$ . On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} E_1(x) = +\infty$ .

<sup>98</sup>La dérivée de l'intégrale exponentielle est :  $\frac{dE_1(x)}{dx} = -\frac{e^{-x}}{x} \mathcal{Y}(x)$ .



trois nouveaux paramètres sont introduits :  $E_\infty = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$ ,  $J_0 = \frac{1}{E_0}$ ,  $J_1 = \frac{1}{E_1}$ . On note aussi que le calcul de l'énergie dissipée pour le modèle de Zener fractionnaire est approché (cf. ma thèse [THE2], pp. 244-246) ; ainsi, lorsque  $\alpha$  tend vers 1, le terme proposé représente un développement limité du terme exact, à l'ordre 1 au voisinage de  $\omega = 0$  (correspondant à  $t$  infini).

## C Les équations différentielles de la dynamique

Les équations différentielles<sup>(99)</sup> jouent un rôle central dans l'utilisation de la puissance des mathématiques pour décrire le monde qui nous entoure. Mon travail de recherche, jusqu'à ce jour, a été limité aux équations différentielles. Les équations différentielles sont en principe d'ordre 2<sup>(100)</sup> ; à partir de la dimension 3 pour l'ordre du système d'équations différentielles, il n'existe quasiment plus d'étude théorique possible mis à part le cas de systèmes linéaires à coefficients constants qui permettent d'obtenir la forme explicite des solutions par exemple à l'aide de techniques de résolution par quadrature<sup>(101)</sup>. Il reste alors l'utilisation des méthodes numériques qui permettent le calcul itératif de solutions approchées. Le monde des équations différentielles linéaires qui est d'un accès facile, a été étudiée depuis longtemps avec profit. Pour aborder ou les équations différentielles non linéaires, il n'existe pas de technique générale fiable et les travaux de plusieurs générations de mathématiciens comme, par exemple, Poincaré, ne fournissent que des renseignements partiels sur le comportement de leurs solutions.

En dynamique des structures, on s'intéresse donc à des structures discrétisées en espace à  $N$  degrés de liberté (par exemple à l'aide des Eléments Finis). La structure est discrétisée en un nombre suffisant de degrés de liberté afin de prédire le plus fidèlement possible, le comportement dynamique de la structure dans une certaine bande fréquentielle.

On note  $\underline{\mathbf{u}}(t)$  le vecteur des déplacements (aux nœuds de la structure pour la méthode des éléments finis) et  $\underline{\mathbf{F}}(t)$  le vecteur des forces extérieures. À partir d'un instant initial  $t_0$ , les équations du mouvement conduisent

- soit à un système de  $N$  équations différentielles du second ordre en  $\underline{\mathbf{u}}(t)$ . En supposant que la configuration de référence est immobile, que le mouvement est décrit par rapport à celle-ci en coordonnées cartésiennes et que les forces extérieures peuvent varier avec les déplacements subis par l'objet, on trouve (cf. Géraudin dans la note de bas de page N°3) le système d'équations suivant :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}(t) + \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{u}}(t), \dot{\underline{\mathbf{u}}}(t)) = \underline{\mathbf{F}}(t, \underline{\mathbf{u}}(t)) \quad (2.19)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  est la matrice de masse qui est symétrique, définie positive. Il faut y adjoindre les conditions initiales :  $\underline{\mathbf{u}}(t_0)$  et  $\dot{\underline{\mathbf{u}}}(t_0)$ . Le terme  $\underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{u}}(t), \dot{\underline{\mathbf{u}}}(t))$  représente les forces internes dans la structure. Il contient à la fois la contribution des forces élastiques et celle des forces de dissipation. Grâce à la méthode des éléments finis<sup>(102)</sup>, il est calculé pour chaque élément fini, par intégration sur le volume, des contraintes  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}})$ <sup>(103)</sup>.

- soit à une relation d'état qui généralement, peut s'écrire pour  $t > t_0$ , sous la forme d'un système différentiel du premier ordre :

$$\dot{\underline{\mathbf{X}}}(t) = \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{X}}, t) + \underline{\mathbf{b}}(\underline{\mathbf{F}}(t), t) \quad (2.20)$$

<sup>99</sup>Selon J.-H. Hubbard, les équations différentielles sont le principal instrument utilisé par les scientifiques pour formuler des modèles mathématiques de situations réelles.

<sup>100</sup>On sait qu'une équation réelle d'ordre 2 (plus généralement d'ordre  $n$ ) peut être considérée comme un système du premier ordre dans  $\mathbb{R}^2$  (plus généralement  $\mathbb{R}^n$ ) ; cf. relation d'état présentée plus loin.

<sup>101</sup>On dit que l'équation différentielle est résoluble par quadrature si l'on peut exprimer ses solutions à partir des fonctions bien connues (fonctions puissances, trigonométriques, logarithme, exponentielles, etc.) au moyen des quatre opérations de l'arithmétique, de la composition et de l'inversion des fonctions et de la prise de primitive aussi appelée quadrature.

<sup>102</sup>Dans la méthode des éléments finis, on adopte habituellement une notation matricielle simplifiée qui prend en compte la symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes : les 6 composantes différentes des tenseurs sont regroupées dans une matrice uni-colonne, respectivement on a :

$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = [\varepsilon_{11} : \varepsilon_{22} : \varepsilon_{33} : \varepsilon_{12} : \varepsilon_{23} : \varepsilon_{13}]^T$  et  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = [\sigma_{11} : \sigma_{22} : \sigma_{33} : \sigma_{12} : \sigma_{23} : \sigma_{13}]^T$ . On pose aussi  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  l'opérateur de dérivation et  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  la matrice associée des cosinus directeurs  $n_i$  de la normale extérieure à la surface qui sont définis par :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{pmatrix}.$$

<sup>103</sup>La force interne pour chaque élément fini vaut :  $\underline{\mathbf{g}}_{el\mathbf{e}}(\underline{\mathbf{u}}(t), \dot{\underline{\mathbf{u}}}(t)) = \int_V \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{\mathbf{e}}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}) dV$  où  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{\mathbf{e}}$  est dans le cas où les non-linéarités sont d'origine matérielle uniquement, la matrice élémentaire des déformations reliant les déformations locales aux déplacements nodaux :  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{\mathbf{e}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}$ . Dans le cas de non-linéarités géométriques,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{\mathbf{e}}$  exprime la relation entre les variations des mêmes quantités.

	Kelvin-Voigt fractionnaire	Zener fractionnaire
N. P.	<b>3</b> ( $E$ , $\tau$ et $\alpha$ )	<b>4</b> ( $E_0$ , $E_1$ , $\tau$ et $\alpha$ )
L.C.	$\sigma = E\varepsilon + E\tau^\alpha D^\alpha \{\varepsilon\}$	$\sigma + \frac{E_\infty}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha \{\sigma\}$ $= E_\infty [\varepsilon + \tau^\alpha D^\alpha \{\varepsilon\}]$
$\Gamma(p)$	$E(1 + \tau^\alpha p^\alpha)$	$E_\infty \frac{1 + \tau^\alpha p^\alpha}{1 + \frac{E_\infty}{E_0} \tau^\alpha p^\alpha}$
$r(t)$	$E \left[ 1 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{-\alpha} \right] \mathcal{Y}(t)$	$[E_\infty - (E_0 - E_\infty) \mathcal{M}_\alpha \left( \left( \frac{-t}{\tau} \right)^\alpha \right)] \mathcal{Y}(t)$
$j(t)$	$\frac{1}{E} [1 - \mathcal{M}_\alpha \left( \left( \frac{-t}{\tau} \right)^\alpha \right)] \mathcal{Y}(t)$	$[(J_0 + J_1) - J_1 \mathcal{M}_\alpha \left( \left( \frac{-t}{\tau} \right)^\alpha \right)] \mathcal{Y}(t)$
$Q(\omega)$	$\cotan \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \text{sign}(\omega)$ $+ \frac{1}{\tau^\alpha \omega^\alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)}$	$\frac{E_0 + E_\infty \tau^{2\alpha} \omega^{2\alpha}}{(E_0 - E_\infty) \tau^\alpha \omega^\alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)}$ $+ \frac{E_0 + E_\infty}{E_0 - E_\infty} \cotan \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \text{sign}(\omega)$
$\Delta W$	$\pi E \tau^\alpha \omega^\alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \varepsilon_m^2$	$\pi E_\infty \tau^\alpha \omega^\alpha \left( 1 - \frac{E_\infty}{E_0} \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \varepsilon_m^2$
$\eta_{eq}$	$\frac{E \tau^\alpha}{\omega^{1-\alpha}} \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)$	$\frac{E_\infty \tau^\alpha}{\omega^{1-\alpha}} \left( 1 - \frac{E_\infty}{E_0} \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)$
$\varsigma$	$\frac{(\tau \omega)^\alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)}{1 + (\tau \omega)^\alpha \cos \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)}$	$\frac{(\tau \omega)^\alpha (E_0 - E_\infty) \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)}{E_0 + E_\infty (\tau \omega)^{2\alpha} + (\tau \omega)^\alpha (E_0 - E_\infty) \cos \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right)}$

Les trois tableaux sont constitués de : N. P. signifie nombre de paramètres, L.C. loi de comportement,  $r(t)$  est la fonction de relaxation,  $\gamma(t)$  est la dérivée de la fonction de relaxation,  $j(t)$  est la fonction de fluage,  $\Gamma(p)$  est le module opérationnel,  $Q(\omega)$  est le facteur de qualité,  $\Delta W$  est l'énergie dissipée au cours d'un cycle de déformation,  $\eta_{eq}(\omega)$  est le coefficient de viscosité équivalent et  $\varsigma$  est le coefficient ou facteur de perte.

**Tab. 2.3** Caractéristiques des modèles rhéologiques fractionnaires de base

à laquelle, on ajoute la relation d'évolution ou d'observation qui relie l'état  $\underline{\mathbf{X}}(t)$  et la sortie  $\underline{\mathbf{u}}(t)$  :

$$\underline{\mathbf{u}}(t) = \mathcal{G}[\underline{\mathbf{X}}(t), \underline{\mathbf{F}}(t), t] \quad (2.21)$$

Le vecteur  $\underline{\mathbf{X}}$  est appelé le vecteur d'état ; pour un système mécanique, le vecteur d'état est habituellement constitué par l'ensemble des positions et vitesses relatives à chaque degré de liberté (ou toute combinaison équivalente). Le premier terme  $a(\underline{\mathbf{X}}, t)$  décrit l'évolution libre du système tandis que le second terme  $b(\underline{\mathbf{F}}(t), t)$  fait intervenir l'évolution forcée par l'intermédiaire de l'excitation. Il faut encore adjoindre la condition initiale  $\underline{\mathbf{X}}(t_0) = \underline{\mathbf{X}}_0$ .

Dans la représentation d'état, le vecteur d'état  $\underline{\mathbf{X}}(t)$  possède la propriété markovienne<sup>(104)</sup> : l'état futur dépend de l'état initial et de l'évolution du signal d'entrée ou de commande  $\{\underline{\mathbf{d}}(\tau) \mid \tau \in [t_0, t_1]\}$  dont  $\underline{\mathbf{F}}(t)$  se présente comme une dérivée en un sens plus ou moins généralisé.

## C.1 Cas linéaire

Le cas du système linéaire conservatif (sans dissipation d'énergie) et non gyroscopique est classiquement étudié ; il correspond au comportement élastique linéaire. La représentation par équations différentielles permet d'écrire :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{F}}(t) = \underline{\mathbf{0}} \quad (2.22)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  est la matrice de rigidité qui est supposée définie positive. Les équations (2.22) peuvent être vues comme un ensemble de résonateurs élémentaires couplés. Le découplage de ces équations est obtenu à l'aide du changement de variables  $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\mathbf{U}}$  où  $\underline{\underline{\Phi}}$  est la matrice modale<sup>(105)</sup> et après multiplication de l'équation différentielle matricielle (2.22) par  $\underline{\underline{\Phi}}^t$ , on obtient :

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}} \ddot{\underline{\mathbf{U}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{k}}} \underline{\mathbf{U}}(t) - \underline{\mathbf{f}}(t) = \underline{\mathbf{0}} \quad (2.23)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{m}}} = \underline{\underline{\Phi}}^t \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}}$  est la matrice de masse généralisée,  $\underline{\underline{\mathbf{k}}} = \underline{\underline{\Phi}}^t \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\Phi}}$  est la matrice de rigidité généralisée et  $\underline{\mathbf{f}}(t) = \underline{\underline{\Phi}}^t \underline{\mathbf{F}}(t)$  est la force d'excitation généralisée.

Il est ensuite possible et fréquent d'ajouter à cette représentation conservative un amortissement forfaitaire de type visqueux. Nous avons vu que l'amortissement correspond à la dissipation d'énergie lors des vibrations de l'objet, généralement sous forme de chaleur<sup>(106)</sup>. Ainsi, dans le cas élastique linéaire stationnaire avec amortissement visqueux, le système d'équations différentielles devient :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \dot{\underline{\mathbf{u}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{F}}(t) = \underline{\mathbf{0}} \quad (2.24)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est la matrice d'amortissement.

D'une façon générale, lorsque le système mécanique étudié est linéaire causal multivariable ayant  $r$  entrées rassemblées dans le vecteur  $\underline{\mathbf{F}}(t)$  et  $m$  sorties rassemblées dans le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}(t)$ , la représentation d'état d'ordre  $n$  du système peut se mettre sous la forme  $F$  :

$$\dot{\underline{\mathbf{X}}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) \underline{\mathbf{X}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t) \underline{\mathbf{F}}(t) \quad (2.25)$$

$$\underline{\mathbf{u}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t) \underline{\mathbf{X}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{D}}}(t) \underline{\mathbf{F}}(t) \quad (2.26)$$

Si les matrices  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  ne dépendent pas du temps, le système est dit stationnaire.

En posant le vecteur d'état  $\underline{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{u}}}(t) \end{pmatrix}$ , on peut écrire le système de  $N$  équations différentielles

linéaires 2.24 sous la forme représentation d'état 2.25 où  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{O}}}_N & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_N \\ -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \end{pmatrix}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{O}}}_N \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \end{pmatrix}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{O}}}_N \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}(t) \end{pmatrix}$ . On obtient un système de  $2N$  équations différentielles du premier ordre. Si on fait, de plus, l'hypothèse que l'on a mesuré  $R$  composantes du déplacement  $R \leq N$ , la matrice d'observation  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  s'écrit alors :  $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{O}}}_R & \underline{\underline{\mathbf{O}}}_{N-R} \end{pmatrix}$ .

<sup>104</sup>La propriété markovienne entraîne que, étant donné la valeur initiale  $\underline{\mathbf{X}}(t_0)$ , le calcul de  $\underline{\mathbf{X}}(t_1)$  à un instant  $t_1$  ultérieur ne fait intervenir que la valeur du signal d'entrée entre  $t_0$  et  $t_1$  :

$$\underline{\mathbf{X}}(t_1) = \mathcal{F}[\underline{\mathbf{X}}(t_0), t_0, t_1, \{\underline{\mathbf{d}}(\tau) \mid \tau \in [t_0, t_1]\}]$$

La limite supérieure  $t_1$  exprime la causalité, la limite inférieure  $t_0$  exprime que l'état futur ne dépend pas de la façon dont les entrées antérieures à  $t_0$  ont pu conduire le système dans l'état initial  $\underline{\mathbf{X}}(t_0)$ , mais seulement de cet état initial et des entrées ultérieures.

<sup>105</sup>La matrice modale est la matrice dont les colonnes sont les modes ou vecteurs propres.

<sup>106</sup>On peut rencontrer aussi une conversion de l'énergie mécanique en rayonnement acoustique, telle la vibration de flexion d'une barre en alliage d'aluminium suspendue à ses extrémités qui soumise à un choc, produit un bruit audible pendant quelques secondes.

### C.1.1 Filtre linéaire

Le filtre linéaire à temps continu ou discret est une classe particulière importante de modèles appartenant à la représentation externe et très utilisée à l'origine, en électronique et en traitement des signaux mais qui peut aussi qualifier un grand nombre de systèmes qu'ils soient mécaniques, chimiques ou biologiques, etc. Le filtre linéaire s'applique à des objets dynamiques qui ont les propriétés suivantes : univoque, continu, linéaire et stationnaire<sup>(107)</sup>. Un filtre linéaire est par définition un opérateur de convolution qui au signal d'entrée  $F(t)$  associe le signal de sortie  $u(t)$  de telle sorte que :

$$F(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.27)$$

Les filtres linéaires doivent habituellement vérifier trois propriétés supplémentaires intrinsèques aux phénomènes physiques réels à savoir : (1) le fait que les signaux d'entrée et de sortie sont réels, (2) la causalité qui traduit que l'effet ne peut pas précéder la cause qui la produit et (3) la stabilité qui traduit qu'une entrée bornée entraîne une sortie bornée.

## C.2 Vibrations d'oscillateurs linéaires. Application à l'isolation vibratoire

Cette section est consacrée à l'étude des vibrations d'oscillateurs amortis linéaires en particulier ceux obtenus à partir de modèles rhéologiques présentés ci-dessus, en leur ajoutant une masse. Plusieurs phénomènes ("classiques") seront mentionnés : comme celui de la résonance, celui de l'amplification dynamique et enfin celui de la transmission des vibrations.

Un premier paragraphe met l'accent entre la différence entre pulsation de résonance et pulsation propre. Une attention particulière est ensuite donnée à l'isolation vibratoire. Prenons l'exemple des machines tournantes telles que les moteurs à explosion, les moteurs électriques, les turbines, etc... Parmi les conséquences des vibrations engendrées par ces machines figure le phénomène de transmission d'un certain niveau vibratoire, au bâti qui supporte la machine. Dans certaines circonstances, ce niveau peut être jugé trop élevé et il devient alors nécessaire d'avoir recours à des techniques d'isolation anti-vibration permettant de réduire les effets transmis au bâti. Parmi ces techniques, la plus usuelle consiste à intercaler entre la machine et sa fondation une suspension viscoélastique afin de réduire la force transmise à la fondation dans une certaine plage de fréquences.

Les oscillateurs linéaires présentés seront donc aussi analysés dans le cadre de l'isolation vibratoire. Ainsi, pour des fréquences voisines de la fréquence de résonance du système masse-isolateur ainsi constitué, il y a généralement au contraire, amplification de la force transmise. Ainsi, lors du projet de conception du système d'isolation, à fixer les fréquences de résonance dans un domaine qui ne recoupe pas celui de l'excitation ou dans un domaine qui ne soit pas jugé gênant pour l'environnement.

### C.2.1 Pulsation de résonance - Pulsation propre

Le phénomène classique dans l'étude des vibrations des structures et donc des oscillateurs est le phénomène de **résonance** bien connu des étudiants en mécanique ; un exemple classique est celui d'un régiment de soldats franchissant un pont au pas. L'excitation "périodique" et répartie lors de son passage est susceptible de détruire le pont si la fréquence de l'excitation correspond à une fréquence de résonance du pont. Si cette expérience militaire a entraîné une modification du règlement militaire, elle reste peu accessible à notre expérience quotidienne. Prenons comme autre exemple, plus connu parce que très désagréable, celui du train non équilibré d'une voiture. Dans certaines plages de vitesse, le volant se met à vibrer violemment. La roue produit une excitation périodique sur la suspension et sur la direction du véhicule par un effet de balourd. Vue de l'extérieur, la roue perd le contact avec le sol d'une manière périodique.

L'ensemble roue, direction, amortissement et ressort peut être représenté par un oscillateur excité par une force périodique. La fréquence de la force est liée à la vitesse du véhicule. A la fréquence de résonance de ce système, l'amplitude du débattement de la masse croît de manière significative pour une amplitude de sollicitation constante. Ce sont deux exemples de phénomènes de résonance qui apparaissent lorsque la fréquence de la force d'excitation égale une fréquence particulière appelée fréquence de résonance. Cette fréquence est définie comme la fréquence qui donne un maximum pour le module de la FRF ou **résonance d'amplitude**.

Il existe une autre fréquence caractéristique pour le système appelée **fréquence propre** qui est définie comme la fréquence des oscillations de la réponse transitoire. Cette notion est liée à la propriété d'isochronisme des filtres

---

<sup>107</sup> *univoque* : à un signal d'entrée correspond un signal de sortie ; *continu* : des signaux d'entrée "peu" différents conduisant à des signaux de sortie "peu" différents ; *linéaire* : réunion des deux propriétés d'additivité et d'homogénéité ; *stationnaire* ou non-veillissant : propriété d'invariance dans le temps.

linéaires<sup>(108)</sup>. Une pulsation propre est aussi définie comme la partie imaginaire d'un des pôles de la fonction de transfert. De nombreux exemples d'objets familiers tels les montres ou les pendules utilisent les effets des fréquences propres des ressorts en spirales, des quartz afin d'obtenir un mouvement périodique permettant une mesure du temps. Les fréquences de résonance et propre ont des valeurs différentes; lorsque l'amortissement modal est "faible", elles sont très voisines et sont généralement confondues.

### C.2.2 Isolation vibratoire

Le concept d'isolation vibratoire est étudié habituellement à l'aide d'un oscillateur formé d'un corps rigide représentant l'équipement relié à une fondation par l'intermédiaire d'un système isolant ayant des propriétés élastiques (support de l'équipement) et amortissantes (dissipation de l'énergie)<sup>(109)</sup>. On étudie séparément le cas des réponses à une force d'excitation harmonique en régime permanent de celui des réponses transitoires à un essai de choc. On se limite par la suite, à l'étude de la réponse permanente de l'oscillateur à une excitation harmonique et on suppose que la réponse de l'oscillateur est aussi harmonique de même pulsation que l'excitation<sup>(110)</sup>. Lorsque le comportement de l'isolant est linéaire, cette dernière hypothèse est immédiatement vérifiée. Finalement, le système isolant possède une certaine rigidité, on note  $k_{st}$  sa rigidité statique et  $\omega_0 = \frac{k_{st}}{m}$  la pulsation propre du système conservatif associé<sup>(111)</sup>. Les modèles présentés dans la suite, seront aussi étudiés dans le cadre de l'isolation vibratoire<sup>(112)</sup>.

Si le modèle rhéologique de l'isolation est non linéaire, on se limite au cas de faibles non-linéarités. Certains théorèmes lorsque les non-linéarités sont découplées en déplacement et en vitesse et assez régulières, comme celui de Reuter<sup>(113)</sup> permettent de conclure sur l'existence d'une solution périodique de période  $T$  de l'équation différentielle à une excitation harmonique de période  $T$  (cf. ma thèse de doctorat pp. 133-135 [THE2]). De façon générale, on peut dire que la réponse d'un oscillateur non linéaire à une excitation périodique de fréquence  $\nu$  peut contenir des vibrations périodiques à la fréquence  $\frac{\nu}{q}$  où  $q$  est un entier supérieur ou égal à 1.

Comme toute fonction périodique peut se développer en séries de Fourier<sup>(114)</sup>, on se limite au premier terme de la série ou premier harmonique ou composante fondamentale :  $u_{fd}(t) = u_1 \cos(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_1)$ . L'application de méthode de Galerkin permet de déterminer des solutions périodiques approchées<sup>(115)</sup>.

Le critère d'efficacité d'une isolation vibratoire est fondé sur la notion de transmissibilité<sup>(116)</sup> et plus précisément sur le coefficient de transmissibilité absolue ou sur le coefficient de transmissibilité relative. Ces coefficients ont des définitions différentes suivant les deux cas pouvant se présenter lors de l'isolation de l'équipement vis à vis de sa fondation :

- La source des vibrations indésirables est produite par l'équipement lui-même. Dans ce cas, la fondation est fixe :  $z(t) = 0$ , il n'y a qu'un mouvement absolu par rapport à la fondation<sup>(117)</sup>. L'équation différentielle

<sup>108</sup>La propriété d'isochronisme énonce que la période des vibrations libres du système est indépendante de l'amplitude de vibration. Cette propriété est vérifiée pour les systèmes linéaires et ne l'est plus pour des systèmes non linéaires.

<sup>109</sup>On note  $m$  la masse de l'oscillateur,  $u(t)$  le déplacement de la masse et  $z(t)$  celui de la fondation; les mesures de déplacement étant faites par rapport à la position d'équilibre statique. Le déplacement relatif de la masse est noté :  $\delta(t) = u(t) - z(t)$ .

<sup>110</sup>La force excitatrice harmonique et la réponse de la masse  $m$  sont notées respectivement :  $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$  et  $u(t) = u_0 \sin(\Omega t + \varphi)$ . On note encore :  $z(t) = z_0 \sin(\Omega t)$  et le déplacement relatif est égal à :  $\delta(t) = \delta_0 \sin(\Omega t + \xi)$

<sup>111</sup>Si la rigidité  $k_{st}$  du ressort n'est pas connue, on peut l'obtenir à l'aide la déflexion statique  $\Delta_{st}$ , en faisant l'hypothèse d'un comportement linéaire :  $k_{st} = \frac{mg}{\Delta_{st}}$ .

<sup>112</sup>L'isolation vibratoire est la conception d'un dispositif permettant la réduction des vibrations de structures et utilisant des techniques de contrôle passif.

<sup>113</sup>Le théorème de Reuter permet de préciser l'existence de solutions périodiques à une équation différentielle du second ordre avec un second membre continu, périodique et borné. Dans le cas de l'équation différentielle en régime forcé :  $\ddot{u} + g(u) + h(\dot{u}) = f_0 \cos(\omega t)$  avec les conditions initiales  $u(t_0) = u_0$  et  $\dot{u}(t_0) = v_0$ , le théorème énonce que si  $g$  et  $h$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  respectivement de  $u$  et  $\dot{u}$ , si leurs dérivées respectives existent et sont continues par morceaux et bornées dans chaque intervalle fini et si  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} g(u) = \pm\infty$  et  $\lim_{\dot{u} \rightarrow \pm\infty} h(\dot{u}) = \pm\infty$ , alors il existe au moins une solution périodique sur  $[t_0, +\infty[$  avec une période minimale  $T$ .

<sup>114</sup>Le théorème énonce que toute fonction périodique  $u(t)$  de période  $T$ , sommable sur une période, a un développement en série de Fourier. On a :  $u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right)$  où  $a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} u(t) dt$ ;  $a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} u(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$

et  $b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} u(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$

<sup>115</sup>On écrit l'équation différentielle sous la forme générale :  $\ddot{u}(t) + F(u, \dot{u}, \nu t) = 0$  où  $F(u, \dot{u}, \nu t)$  est une fonction périodique de  $t$  avec une période minimum de  $\frac{2\pi}{\nu}$ . La solution approchée de cette équation différentielle, est recherchée sous la forme d'une série

$\ddot{u}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(t)$  où les constantes  $c_k$  sont à déterminer et les fonctions indépendantes  $\psi_k(t)$  ou fonctions génératrices sont connues.

Si la solution période de fréquence existe, alors les  $n$  constantes  $c_k$  sont déterminer à l'aide des  $n$  conditions :  $\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} E(t) \psi_k(t) dt$  où  $E(t)$  est l'erreur.

<sup>116</sup>La force transmise de la masse à la fondation est notée :  $F_{tr} = F_{tr0} \sin(\Omega t + \psi)$

<sup>117</sup>On a alors :  $\delta(t) = u(t)$  et le coefficient de transmissibilité relative n'a pas de signification.

qui régit le mouvement de la masse  $m$  est :  $m\ddot{u} + F_{tr}(t) = F(t)$ . La force transmise  $F_{tr}(t)$  dépend de  $u(t)$  et de  $\dot{u}(t)$ . La transmissibilité absolue  $T_a$  a seule, un sens et est définie comme le rapport de l'amplitude de la force transmise à la fondation sur l'amplitude de la force excitatrice. On s'intéresse aussi au coefficient d'amplification dynamique  $A_d$  défini comme le rapport du déplacement de la masse sur le déplacement statique qu'aurait un ressort de rigidité  $k_{st}$  soumis à la force constante  $F_0$  <sup>(118)</sup>.

- La fondation est soumise à un déplacement  $z(t)$  imposé et transmet des vibrations à l'équipement. La force  $F(t)$  appliquée à la masse est nulle. L'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse  $m$  est :  $m\ddot{u} + F_{tr}(t) = 0$ . La force transmise  $F_{tr}(t)$  dépend du déplacement relatif  $\delta(t)$  et de sa dérivée  $\dot{\delta}(t)$ . On définit le coefficient de transmissibilité absolue comme le rapport de l'amplitude du déplacement absolu de la masse sur l'amplitude du déplacement imposé à la fondation. On définit aussi la transmissibilité relative comme le rapport de l'amplitude du déplacement relatif de la masse sur l'amplitude du déplacement imposé à la fondation <sup>(119)</sup>.

Les coefficients de transmissibilité absolue et relatif ainsi que le coefficient d'amplification dynamique (lorsqu'ils sont définis) sont obtenus après résolution de l'équation différentielle. Lorsque le comportement est linéaire, le passage en variables complexes permet d'obtenir rapidement la solution. Ces coefficients sont ensuite tracés en fonction du rapport entre la pulsation de la source de vibrations et la pulsation du système conservatif associé :  $X = \frac{\Omega}{\omega_0}$ .

### C.2.3 Quelques matériaux usuels pour l'isolation vibratoire

Les ressorts métalliques hélicoïdaux sont les systèmes d'isolation classiques <sup>(120)</sup>. Ils ont l'avantage d'être peu sensible aux états ambiants (température, graisse,...). Les inconvénients viennent de leur faible capacité d'amortissement et de leur facilité à transmettre les bruits. Leur efficacité sera améliorée en les doublant d'amortisseurs <sup>(121)</sup>. Les suspensions à air sont également employés. Les amortisseurs peuvent être quelquefois remplacés par des matériaux qui, en plus d'une certaine élasticité, possèdent des frottements internes propres assez considérables. Les matériaux les plus couramment utilisés pour l'isolation des vibrations mécaniques sont le caoutchouc, le liège (aggloméré), le feutre, le plomb et des matières plastiques expansées ou non <sup>(122)</sup>. On peut aussi remédier aux inconvénients des ressorts métalliques en les posant sur du caoutchouc ou du feutre. Les supports caoutchouc ou élastomères <sup>(123)</sup> sont utilisés généralement pour l'isolation des machines légères. Le caoutchouc a de bonnes propriétés d'amortissement <sup>(124)</sup> mais elles varient en fonction de la charge, de la température et des conditions ambiantes. L'élastomère doit aussi être formulé pour des utilisations industrielles (incorporation d'un certain nombre d'additifs : charges et plastifiants, agents de protection, système de vulcanisation). Enfin, les plots en élastomères ont, en plus des propriétés des élastomères, des propriétés de résistance à l'usure et une bonne tenue aux produits chimiques. Le liège est surtout employé pour l'isolation acoustique mais donne également de bons résultats pour l'isolation mécanique de machines légères. Ses caractéristiques élevées d'amortissement ne sont pas affectées par des contacts d'huile ou d'eau et les variations faibles de température. Par contre, il n'est pas parfaitement élastique.

L'efficacité de chaque type dépend toujours des conditions particulières d'emploi. Les suspensions à air ont de très basses fréquences de résonance ; on peut atteindre des fréquences de résonance de l'ordre de 1Hz. Les ressorts métalliques hélicoïdaux ont des fréquences de résonance basses de l'ordre de 3Hz. Des fréquences de 5Hz et plus sont classiques pour les supports caoutchouc. Des fréquences propres de l'ordre de 25Hz et au-dessus sont typiques pour le liège. Le feutre permet d'éviter la transmission des vibrations hautes fréquences.

La famille des élastomères est devenue actuellement très étendue et le choix d'un élastomère pour le choix et la conception d'une pièce pour l'isolation repose principalement sur la pondération des cinq critères suivants : (1) résistance à l'environnement, (2) contraintes mécaniques, (3) température de service, (4) conditions de mise en oeuvre et (5) prix. L'environnement immédiat détermine les propriétés générales, les contraintes mécaniques

<sup>118</sup>  $T_a = \frac{F_{tr0}}{F_0}$  et  $A_d = \frac{u}{u_{st}}$  avec  $u_{st} = \frac{F_0}{k_{st}}$ .

<sup>119</sup>  $T_a = \frac{u_0}{z_0}$  et  $T_r = \frac{\delta_0}{z_0}$  où  $z_0$  est l'amplitude de la fondation.

<sup>120</sup> Si on suppose que les ressorts n'ont aucune capacité d'amortissement, alors le coefficient de transmissibilité absolue vaut :  $T_a(X) = \frac{1}{|1-X^2|}$  où  $X = \frac{\Omega}{\omega_0}$ .

<sup>121</sup> Les amortisseurs ou dash-pots sont constitués par exemple, de cylindres remplis d'huiles dans lequel le déplacement d'un piston engendre un frottement et donc un amortissement de la vibration.

<sup>122</sup> En anglais, caoutchouc="rubber", liège="cork", feutre="felt", plomb="lead", ressorts métalliques="metal springs", matières plastiques="plastics" et suspensions à air="pneumatic shock-absorbers".

<sup>123</sup> Les élastomères (famille des polymères) désignent de façon générale tous les caoutchoucs, substances macromoléculaires naturelles ou synthétiques possédant l'élasticité caoutchoutique.

<sup>124</sup> Les principales caractéristiques des élastomères sont : (1) la souplesse due à leur faible rigidité (module d'élasticité  $E$  de l'ordre de quelques MPa.), (2) une haute déformabilité : ils sont capables de supporter de très grandes déformations sans se rompre et d'atteindre des allongements à la rupture de plus de 100% et enfin (3) une grande élasticité : ils sont capables de retrouver leur géométrie initiale après cessation d'une sollicitation.



donnent le niveau de performance ; la durée de vie en service est estimée par la température d'usage ; la nature du produit donne le mode de production ; le prix est le dernier paramètre permettant d'assurer le compromis entre coût et fonction. Les spécialistes utilisent cette démarche pour définir l'élastomère le plus approprié à un usage (par exemple l'étanchéité, le calage, la protection contre l'abrasion et aussi l'isolation vibratoire). Leur rôle est ensuite de formuler les différents ingrédients permettant d'obtenir le meilleur compromis. La présentation dans ce mémoire est limitée au premier cas où l'équipement provoque les vibrations indésirables.

### C.3 Les oscillateurs linéaires

Dans ce paragraphe, on étudie le comportement vibratoire de quatre oscillateurs linéaires qui sont respectivement l'oscillateur de type Kelvin-Voigt avec amortissement visqueux sous-critique, l'oscillateur hystérétique, l'oscillateur de type Zener et l'oscillateur de type Kelvin-Voigt fractionnaire. Pour chacun d'entre eux, on donne lorsque cela est possible : (1) l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse et à laquelle on doit rajouter pour pouvoir la résoudre, les conditions initiales en déplacement  $u(t_0) = u_0$  et en vitesse  $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$ , (2) l'expression des pôles et de la réponse en vibrations libres, (3) la fonction de réponse en fréquence (FRF)  $H(\omega)$ , (4) la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , (5) les coefficients d'amplification dynamique  $A_d(X)$  et de transmissibilité absolue  $T_a(X)$ .

#### C.3.1 L'oscillateur de type Kelvin-Voigt

C'est l'oscillateur le plus fréquemment utilisé en dynamique des structures. Il est fondé sur le modèle rhéologique de Kelvin-Voigt<sup>(125)</sup> avec un amortissement visqueux de type sous-critique. L'équation différentielle normalisée régissant les vibrations forcées de cet oscillateur est :

$$\ddot{u} + 2\lambda\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{F(t)}{m} \quad (2.28)$$

$\omega_0$  est la pulsation propre du système conservatif associé. Le taux d'amortissement  $\lambda$  est compris entre 0 strictement et 1 ; on a deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative<sup>(126)</sup>. La pulsation propre est :  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}$ . La solution en déplacement de l'équation différentielle homogène associée à l'équation (2.28) est :  $u(t) = e^{-\lambda\omega_0 t} \left\{ u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{u}_0 + \lambda\omega_0 u_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right\}$ .

La FRF de type réceptance s'écrit :  $H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega_0\omega)}$ . La FRF de type mobilité s'écrit dans le plan de Nyquist sous la forme d'un cercle<sup>(127)</sup> de centre  $(\frac{1}{2c}, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{2c}$  qui est entièrement parcouru lorsque  $\omega$  parcourt  $\mathbb{R}^+$ . On n'obtient pas de cercles pour le tracé des deux autres FRF dans le plan de Nyquist<sup>(128)</sup>.

La réponse impulsionnelle est oscillante avec une amplitude exponentielle décroissante :  $h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\lambda\omega_0 t} \sin(\omega_d t)$ . On pose  $X = \frac{\Omega}{\omega_0}$ . Le coefficient d'amplification dynamique vaut :  $A_d(X) = \frac{1}{\sqrt{(1-X^2)^2 + 4\lambda^2 X^2}}$  et le coefficient de

transmissibilité absolue vaut :

$$T_a(X) = \frac{\sqrt{1+4\lambda^2 X^2}}{\sqrt{(1-X^2)^2 + 4\lambda^2 X^2}} \quad (129).$$

$A_d(X)$  est maximum pour  $X = X_1 = \sqrt{1 - 2\lambda^2}$ , la pulsation de résonance est  $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda^2}$ . Le maximum vaut :

$$A_{d_{max}} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (130).$$

$T_a(X)$  est maximum pour  $X = X_2 = \frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+8\lambda^2}}}{2\lambda}$  et son maximum vaut :

$$T_{a_{max}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2(3+\sqrt{1+8\lambda^2})}\right)} \quad (131).$$

<sup>125</sup>On rappelle que le modèle de Kelvin-Voigt est formé d'un ressort  $k$  et d'un amortisseur visqueux  $c$  en parallèle.

<sup>126</sup>On rappelle que :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\lambda = \frac{c}{2m\omega_0}$ . Les pôles sont les racines de l'équation caractéristique  $r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$  :  $r_1 = -\lambda\omega_0 + i\omega_d$  où  $\omega_d$  est la pseudo-pulsation propre :  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}$ .

<sup>127</sup>L'équation du cercle dans la plan de Nyquist est :  $(\Re\{H\} - \frac{1}{2c})^2 + (\Im\{H\})^2 = \frac{1}{4c^2}$ .

<sup>128</sup>Pour la FRF de type réceptance, on a :  $(\Re\{H\})^2 + (\Im\{H\} + \frac{1}{2c\omega})^2 = \frac{1}{4c^2\omega^2}$  et pour la FRF de type inertance, on a :  $(\Re\{H\})^2 + (\Im\{H\} + \frac{\omega}{2c})^2 = \frac{\omega^2}{4c^2}$ .

<sup>129</sup>Les déphasages respectivement  $\varphi$ , entre la réponse et la force d'excitation et  $\psi$ , entre la force transmise et la force d'excitation sont tels que :  $\tan(\varphi) = -\frac{2\lambda X}{1-X^2}$  et  $\tan(\psi) = -\frac{2\lambda X^3}{(1-X^2)^2 + 4\lambda^2 X^2}$ .

<sup>130</sup>On note que pour  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $X_1 = 0$  et  $A_{d_{max}} = 1$ . On n'a pas d'amplification dynamique. On note aussi que lorsque  $\lambda$  est "petit", on a :  $A_{d_{max}} \approx \frac{1}{2\lambda}$ .

<sup>131</sup>On a aussi l'écriture :  $T_{a_{max}} = \sqrt{\frac{8\lambda^4}{8\lambda^4 - 4\lambda^2 - 1 + \sqrt{1+8\lambda^2}}}$ . Lorsque  $\lambda$  est "petit", on a :  $T_{a_{max}} \approx \frac{1}{2\lambda}$ . On note aussi que pour

Le comportement asymptotique pour des  $\Omega$  “grands”, de  $A_d(X)$  et de  $T_a(X)$  est respectivement de l'ordre de :

$$\frac{1}{X^2} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \text{ et de } \frac{2\lambda}{X} = \frac{2\lambda\omega_0}{\Omega}.$$

Pour une isolation correcte (zone d'atténuation), il faut avec ce modèle d'oscillateur que :  $X \gg \sqrt{2}$ <sup>(132)</sup>. Donc de façon générale, cette condition est “plus facilement” vérifiée si  $\omega_0$  est faible. Les conditions favorables sont donc une masse  $m$  “plus” importante et/ou une rigidité du système isolant plus faible. D'un point technologique, des isolateurs trop souples avec une masse trop importante risquent de poser des problèmes de stabilité. De plus, le tracé de  $T_a(X)$  montre que lorsque  $\lambda$  augmente, l'enveloppe de  $T_a$  décroît pour  $0 < X < \sqrt{2}$ ; et elle augmente pour  $X > \sqrt{2}$ . Ainsi, pour des vibrations à fréquence  $\Omega$  élevées, il est préférable d'utiliser des amortisseurs à très faible taux d'amortissement  $\lambda$ . Par contre, pour des pulsations telles que  $\Omega < \sqrt{2}\omega_0$ , on utilisera des amortisseurs à taux d'amortissement  $\lambda$  élevé.

L'introduction de ce modèle dans les équations du mouvement procure des relations “simples” mais il est souvent loin de représenter correctement les effets dissipatifs réels.

### C.3.2 L'oscillateur avec amortissement hystérétique

On s'intéresse en premier lieu, à l'oscillateur hystérétique idéal même tout en sachant que ce modèle n'est pas causal. Lorsque l'excitation  $F(t)$  est harmonique et uniquement dans ce cas, l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse de l'oscillateur peut se mettre sous la forme pour des pulsations positives :

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2(1 + i\gamma)u(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (2.29)$$

et pour des pulsations négatives :

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2(1 - i\gamma)u(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (2.30)$$

où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\gamma > 0$ . Le terme  $k(1 + i\gamma)$  est appelé rigidité complexe : l'amortissement hystérétique est proportionnel à l'amplitude du déplacement et de direction opposée à celle de la vitesse pour des excitations harmoniques. Le paramètre  $\gamma$  est égal au coefficient (ou facteur) de perte et par conséquent est compris entre 0 strict et 1<sup>(133)</sup>. On note  $\omega_\gamma = \omega_0\sqrt{1 + i\gamma}$  la pulsation propre complexe de l'oscillateur.

Les deux pôles sont complexes conjugués à partie réelle négative<sup>(134)</sup>.

La FRF de type réceptance s'écrit :  $H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0^2 \operatorname{sgn}(\omega))}$ <sup>(135)</sup>.

Dans le plan de Nyquist, pour des valeurs de  $\omega$  positives, on obtient un cercle de centre  $(0, -\frac{1}{2m\omega_0^2\gamma})$  et de rayon  $\frac{1}{2m\omega_0^2\gamma}$  qui n'est pas entièrement parcouru lorsque  $\omega$  parcourt  $\mathbb{R}^+$ . Pour la FRF de type vélocité, on n'obtient pas de cercle<sup>(136)</sup> dans le plan de Nyquist tandis que pour la FRF de type inertance, on obtient un cercle de centre  $(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m\gamma})$  et de rayon  $\frac{1}{2m} \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma}$  non entièrement parcouru lorsque  $\omega$  parcourt  $\mathbb{R}^+$ .

La réponse impulsionnelle est oscillante avec une amplitude décroissante :

$h(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{2\pi} \Re \left\{ \frac{1}{\omega_\gamma} [-e^{-i\omega_\gamma t} Ei(i\omega_\gamma t) + e^{i\omega_\gamma t} \{Ei(-i\omega_\gamma t) - 2\pi i \mathcal{Y}(t)\}] \right\}$ <sup>(137)</sup>. Elle est non causale (cf. ma thèse [THE2]).

On pose  $X = \frac{\Omega}{\omega_0}$  et aussi :  $k_{st} = k \sqrt{1 + \gamma^2}$ . Par conséquent, on a :  $u_{st} = \frac{F_0}{m\omega_0^2 \sqrt{1 + \gamma^2}}$ . Le coefficient d'amplification dynamique et le coefficient de transmissibilité absolue sont alors égaux :  $A_d(X) = T_a(X) = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2}}{\sqrt{(1 - X^2)^2 + \gamma^2}}$ .

Le maximum est toujours atteint pour  $X = 1$  ( $\omega_0$  est la pulsation de résonance d'amplitude) et vaut :

$A_{d_{\max}} = T_{a_{\max}} = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2}}{\gamma}$  qui est toujours supérieur à 1 ; on a toujours amplification dynamique quelle que soit la valeur de  $\gamma$  contrairement à l'oscillateur de Kelvin-Voigt. On note que pour  $X > \sqrt{2}$ , ces deux coefficients sont strictement inférieurs à 1<sup>(138)</sup>. Le comportement asymptotique pour des  $\Omega$  “grands”, de  $A_d(X)$

---

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , alors  $T_{a_{\max}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ .

<sup>132</sup>Si  $X = \sqrt{2}$ , alors  $T_a(X) = 1$ .

<sup>133</sup>la valeur  $\gamma = 1$  étant obtenue pour des caoutchoucs très durs.

<sup>134</sup>Les équations caractéristiques sont :  $r^2 + \omega_0^2(1 \pm i\gamma) = 0$ . Les deux solutions sont :  $r_1 = i\omega_0(1 + \gamma^2)^{0.25} e^{i\frac{\xi}{2}}$  et  $r_2 = -i\omega_0(1 + \gamma^2)^{0.25} e^{-i\frac{\xi}{2}}$  où  $\xi$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , est tel que  $\tan(\xi) = \gamma$ .

<sup>135</sup>La fonction  $\operatorname{sgn}(\omega)$  est introduite pour que  $H(\omega)$  vérifie la propriété hermitique.

<sup>136</sup>Pour la FRF de type vélocité, l'équation de la courbe dans le plan de Nyquist est :  $\left( \Re\{H\} - \frac{\omega}{2m\omega_0^2\gamma} \right)^2 + (\Im\{H\})^2 = \frac{\omega^2}{4m^2\omega_0^4\gamma^2}$ .

<sup>137</sup> $Ei(z)$  désigne l'exponentielle intégrale :  $Ei(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt$  où  $z$  est dans le plan complexe privé de l'axe des réels positifs.

<sup>138</sup>Si  $X = \sqrt{2}$ , alors  $A_d(X) = T_a(X) = 1$ .

et de  $T_a(X)$  est de l'ordre de :  $\frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{X^2} = \frac{\sqrt{1+\gamma^2} \omega_0^2}{\Omega^2}$ . Les effets d'isolation sont semblables pour l'oscillateur de Kelvin-Voigt et l'oscillateur hystérétique idéal, excepté pour le comportement asymptotique pour des fréquences élevées où le modèle d'amortissement hystérétique permet une meilleure atténuation.

### C.3.3 L'oscillateur de type Zener

L'oscillateur de Zener est fondé sur le modèle rhéologique de Zener<sup>(139)</sup> qui renferme une variable cachée. Par conséquent, l'équation différentielle qui régit les vibrations forcées de cet oscillateur soumis à l'excitation  $F(t)$  est du troisième degré :

$$\ddot{u} + \frac{1}{\tau_\infty} \dot{u} + \omega_0^2 u + \frac{\omega_\infty^2}{\tau_\infty} u = \frac{1}{m} \left[ \dot{F} + \frac{F}{\tau_\infty} \right] \quad (2.31)$$

où  $\tau_\infty = \frac{c}{k_0 + k_1}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}$ ,  $\omega_\infty^2 = \frac{k_\infty}{m}$  avec  $k_\infty = \frac{k_0 k_1}{k_0 + k_1}$  est la rigidité reliée au module d'élasticité relâché<sup>(140)</sup> du modèle rhéologique de Zener ( $k_\infty < k_0$  et  $k_\infty < k_1$ ).

L'oscillateur de Zener permet donc de prendre en compte un pôle négatif  $-a_1$  avec  $a_1$  réel positif. Les deux autres pôles sont complexes conjugués à partie réelle négative<sup>(141)</sup>. La réponse impulsionnelle s'écrit :

$$h(t) = \frac{1}{m \omega_{d_1}} \sqrt{\frac{\omega_0^2 + a_1^2}{3a_1^2 + \omega_0^2 - \frac{2a_1}{\tau_\infty}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\tau_\infty} - a_1)t} \sin(\omega_{d_1} t + \psi) + \frac{a_1(1 - a_1 \tau_\infty) \left( \omega_0^2 + a_1^2 - \frac{a_1}{\tau_\infty} \right)}{3a_1^2 - \frac{2a_1}{\tau_\infty} + \omega_0^2} e^{-a_1 t}$$

où  $\omega_{d_1}^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}a_1^2 - \frac{a_1}{2\tau_\infty} - \frac{1}{4\tau_\infty^2}$  et  $\psi = \text{Arctg}\left(\frac{2\omega_{d_1}}{a_1}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{2\tau_\infty \omega_{d_1}}{3a_1 \tau_\infty - 1}\right)$

La FRF de type réceptance s'écrit :  $H(\omega) = \frac{1+i\tau_\infty \omega}{m((\omega_\infty^2 - \omega^2) + i\tau_\infty \omega(\omega_0^2 - \omega^2))}$ .

En introduisant  $\lambda' = \frac{\tau_\infty \omega_\infty}{2}$  qui est homogène à un taux d'amortissement<sup>(142)</sup>, la relation précédente devient :

$$H(\omega) = \frac{1+i2\lambda' \frac{\omega}{\omega_\infty}}{m\omega_\infty^2 \left( \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_\infty}\right)^2\right) + i2\lambda' \frac{\omega}{\omega_\infty} \left( \left(\frac{\omega_0}{\omega_\infty}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_\infty}\right)^2 \right) \right)}.$$

On a  $k_{st} = k_\infty$  et par conséquent  $u_{st} = \frac{F_0}{k_\infty}$ . On pose  $X = \frac{\Omega}{\omega_\infty}$ . Avec les notations précédentes, le coefficient

d'amplification dynamique s'écrit alors :  $A_d(X) = \frac{\sqrt{1+4\lambda'^2 X^2}}{\sqrt{(1-X^2)^2 + 4\lambda'^2 X^2 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} - X^2 \right)^2}} \quad (143)$ . Les courbes  $A_d(X)$  pour

un  $\gamma$  fini fixé, en faisant varier  $\lambda'$ , montrent que lorsque  $\lambda'$  tend vers 0, l'oscillateur de type Zener est semblable à un oscillateur de type Kelvin-Voigt avec une pulsation de résonance voisine de  $\omega_0$  et lorsque  $\lambda'$  devient "infini", il est semblable à un modèle de Kelvin-Voigt avec une pulsation de résonance proche de  $\omega_0 \sqrt{1+\gamma}$ . Pour certaines valeurs de  $\lambda'$  intermédiaires, la courbe a tendance à devenir assez plate et inférieure à 1 sur la plage de pulsation qui peut assez étendue entre  $\omega_0$  et  $\omega_0 \sqrt{1+\gamma}$  pour ensuite tendre rapidement vers 0 à

<sup>139</sup>L'oscillateur de Zener est formé d'un système ressort+dash-pot (rigidité  $k_1$ , coefficient d'amortissement visqueux  $c$ ) en parallèle et d'un ressort en série (rigidité  $k_0$ ). Il est égal à l'oscillateur de Kelvin-Voigt lorsque l'on fait  $k = k_1$  et  $k_0 = \infty$ .

<sup>140</sup>Lorsque le mouvement est infiniment lent, l'amortisseur dans le modèle rhéologique de Zener n'intervient pas et le modèle se comporte comme deux ressorts en série, soit un ressort unique de constante  $k_\infty$

<sup>141</sup>L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (2.31) est :  $r^3 + \frac{1}{\tau_\infty} r^2 + \omega_0^2 r + \frac{\omega_\infty^2}{\tau_\infty} = 0$ . On montre (cf. thèse [THE2] pp. 235-236) que cette équation caractéristique admet un zéro réel non positif ( $-a_1$ ) tel que  $0 \leq a_1 < \frac{1}{\tau_\infty}$ . Les deux autres zéros sont complexes conjugués, à partie réelle négative. On peut factoriser l'équation caractéristique sous la forme  $(r+a_1)(r^2 + 2\lambda_1 \omega_1 r + \omega_1^2)$  avec  $\omega_1^2 = \omega_0^2 + a_1 \left( a_1 - \frac{1}{\tau_\infty} \right)$  et  $2\lambda_1 \omega_1 = \frac{1}{\tau_\infty} - a_1$ .

<sup>142</sup>Si on pose  $k_0 = \gamma k_1$  avec  $\gamma > 0$ , on obtient :  $\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} = 1 + \frac{k_0}{k_1} = 1 + \gamma > 1$  et  $\lambda' = \frac{\sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)^{\frac{3}{2}}} \frac{c}{2\sqrt{m}\sqrt{k_1}}$ . On note que si  $\gamma$  tend vers l'infini ( $k_0$  tend vers l'infini et  $\omega_\infty$  tend vers  $\omega_1$  ; le modèle de Zener tend vers le modèle de Kelvin Voigt), alors  $\lambda'$  tend zéro et  $\lambda' \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}$  tend vers  $\left( \frac{c}{2\sqrt{m}\sqrt{k_1}} \right)$  qui est le taux d'amortissement du système masse + ressort  $k_1$  et amortisseur  $c$  en parallèle.

<sup>143</sup>Le déphasage  $\varphi$  entre la réponse et la force d'excitation est tel que :  $\tan(\varphi) = -\frac{2\lambda' X \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} - 1 \right)}{(1-X^2) + 4\lambda'^2 X^2 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} - X^2 \right)}$  et  $\cos(\varphi) =$

$$\frac{(1-X^2) + 4\lambda'^2 X^2 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} - X^2 \right)}{\sqrt{1+4\lambda'^2 X^2} \sqrt{(1-X^2)^2 + 4\lambda'^2 X^2 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} - X^2 \right)^2}}.$$

mesure que la pulsation  $\Omega$  augmente. Le comportement asymptotique pour des  $\Omega$  “grands”, de  $A_d(X)$  est respectivement de l'ordre de :  $\frac{1}{X^2} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$  <sup>(144)</sup>. On note que toutes ces courbes passent par un point fixe de coordonnées  $\left( \sqrt{\frac{1+\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}}{2}}, \frac{2}{\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}-1} \right)$  <sup>(145)</sup>.

L'expression du coefficient de transmissibilité absolue est très semblable de celle du coefficient d'amplification dynamique, elle s'écrit :

$$T_a(X) = \sqrt{\frac{1+4X^2\lambda'^2\frac{\omega_0^4}{\omega_\infty^4}}{(1-X^2)^2+4\lambda'^2X^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}-X^2\right)^2}}. \text{ On note que les courbes } T_a(X) \text{ pour un } \gamma \text{ fini fixé, en faisant varier } \lambda'$$

passent par un point fixe de coordonnées  $\left( \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}+1}}, 1+\frac{2}{\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}-1} \right)$  <sup>(146)</sup>. Dans le cas où  $k_0$  garde une valeur finie, le comportement asymptotique pour des  $\Omega$  “grands”, de  $T_a(X)$  est respectivement de l'ordre de :  $\frac{\omega_0^2}{X^2} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$ .

### C.3.4 le modèle de type Kelvin-Voigt fractionnaire

L'oscillateur de type Kelvin-Voigt fractionnaire est équivalent à l'oscillateur de type Kelvin-Voigt dans lequel le dash-pot a été remplacé par un sprong-pot. L'équation différentielle qui régit les vibrations de cet oscillateur est :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \omega_0^2 \tau^\beta D^\beta \langle u \rangle = \frac{F(t)}{m}$$

où  $\beta$  est un réel  $0 < \beta \leq 1$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\omega_0 \neq 0$ . Si  $\beta$  est choisi sous la forme d'une fraction rationnelle à une indéterminée sur  $\mathbb{N}$ , écrite sous forme irréductible :  $\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ , alors les pôles sont au nombre de  $2\mu_2$  <sup>(147)</sup>.

Posons  $u_{st} = \frac{F_0}{k}$ ,  $\tau = \frac{1}{\omega_\varepsilon}$  et aussi  $X_0 = \frac{\omega_\varepsilon}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 \tau}$ ;  $X_0$  est un paramètre sans dimension.

Le coefficient d'amplification dynamique vaut alors :

$$A_d(X) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-X^2+\left(\frac{X}{X_0}\right)^\beta \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{X}{X_0}\right)^{2\beta} \sin^2\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)}}$$

et le coefficient de transmissibilité absolue<sup>(148)</sup> :

$$T_a(X) = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{X}{X_0}\right)^\beta \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{X}{X_0}\right)^{2\beta} \sin^2\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\left(1-X^2+\left(\frac{X}{X_0}\right)^\beta \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{X}{X_0}\right)^{2\beta} \sin^2\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)}}$$

Le comportement asymptotique pour des  $\Omega$  “grands”, de  $A_d(X)$  et de  $T_a(X)$  est respectivement de l'ordre de :  $\frac{1}{X^2}$  et de l'ordre de :  $\frac{1}{X_0^\beta} \frac{1}{X^{2-\beta}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_\varepsilon^\beta} \frac{1}{\Omega^{(2-\beta)}}$ . La puissance de  $\Omega$  au dénominateur est en  $(2-\beta)$  qui est compris entre 1 et 2<sup>(149)</sup>.

<sup>144</sup>  $\frac{\omega_\infty^2}{\Omega^2}$  tend vers  $\frac{\omega_1^2}{\Omega^2}$  lorsque  $k_0$  tend vers l'infini. On retrouve ainsi résultats obtenus pour le modèle de Kelvin-Voigt.

<sup>145</sup> Si on introduit le paramètre  $\gamma$ , les coordonnées du point “fixe” s'écrivent :  $\left( \sqrt{1+\frac{\gamma}{2}}, \frac{2}{\gamma} \right)$ .

<sup>146</sup> Si on introduit le paramètre  $\gamma$ , les coordonnées du point “fixe” s'écrivent :  $\left( \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2+\gamma}}, 1+\frac{2}{\gamma} \right)$ .

<sup>147</sup> Les pôles sont solutions de :  $p^2 + \omega_0^2 + \omega_0^2 \tau^\beta p^\beta = 0$ . : On pose  $\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  avec  $\mu_1 \leq \mu_2$ . L'équation caractéristique précédente devient en posant  $s = p^{\frac{1}{\mu_2}}$  :  $s^{2\mu_2} + \omega_0^2 \tau^\beta s^{\mu_1} + \omega_0^2 = 0$ . Les pôles complexes s'il y en a, sont deux à deux conjugués.

<sup>148</sup> On a aussi :  $T_a(X) = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{X}{X_0}\right)^{2\beta}+2\left(\frac{X}{X_0}\right)^\beta \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\left(1-X^2+\left(\frac{X}{X_0}\right)^\beta \cos\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{X}{X_0}\right)^{2\beta} \sin^2\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)}}$ .

<sup>149</sup> Pour le modèle de Kelvin-Voigt, on avait une décroissance en  $\frac{1}{\Omega}$  et pour le modèle hystérétique idéal de l'ordre de  $\frac{1}{\Omega^2}$ .

## D Quelques modèles non linéaires

Revenons sur le cas des équations différentielles non linéaires. L'hypothèse de linéarité qui est souvent légitime, est toutefois extrêmement restrictive et ne permet de décrire que le comportement dynamique d'un nombre restreint de structures. Un objet réel possède un comportement non linéaire, en particulier lorsque l'on augmente l'amplitude de la force d'excitation. Le qualificatif de "non linéaire" est imprécis : il regroupe un ensemble vaste de comportements qui ne répondent pas "bien" dans le sens où toute la théorie développée pour le cas linéaire n'est plus directement applicable. La non-unicité éventuelle de la réponse d'un objet non linéaire rend le problème direct très difficile. Ainsi, pour une même sollicitation, la réponse de la structure varie suivant les conditions initiales. Plusieurs modèles non-linéaires peuvent donner une réponse semblable pour une même excitation. Chaque type de non-linéarité constitue un problème particulier qui doit être traité séparément. Le comportement linéaire apparaît alors comme un cas particulier dont les propriétés permettent une interprétation physique facilitée. Parmi les non-linéarités en mécanique, on définit trois grands types :

1. **interne** : dans ce cas, le comportement non-linéaire est lié aux propriétés des matériaux constituant l'objet, que nous avons précédemment étudiées. Classiquement, il existe un domaine d'élasticité linéaire correspondant aux réponses de l'objet à des sollicitations de "faible amplitude" où le comportement réel de l'objet peut être assumé être linéaire et réversible dans l'hypothèse de petites perturbations. Lorsque l'amplitude de la sollicitation entraîne la structure à dépasser le seuil d'élasticité, le comportement devient irréversible et nous avons vu qu'il apparaît habituellement un écoulement plastique plus ou moins important, et qui peut conduire une ou plusieurs parties de l'objet à la ruine. De plus, une excitation de longue durée entraîne pour la majorité des matériaux, des phénomènes de fatigue et/ou d'endommagement avec apparition de fissures qui peuvent se produire même si la réponse de la structure reste dans la domaine élastique.
2. **géométrique** : l'hypothèse de petites perturbations n'est plus valide : l'objet répond avec de grandes déformations et/ou de grands déplacements aux sollicitations imposées. Les équations du mouvement sont difficiles à écrire et peuvent conduire à des phénomènes chaotiques.
3. **d'interface** : Le comportement non linéaire est lié au comportement des liaisons et des assemblages entre les différentes parties de l'objet. Les liaisons sont le site de frottement et de jeux dont l'importance se manifeste pour de faibles amplitudes. Il apparaît des phénomènes de seuil.

Dans le cas d'une structure complexe, on peut retrouver associées, un ensemble de non-linéarités de différents types, ce qui complique grandement le problème direct et par conséquent le problème de l'identification dynamique. L'objet non linéaire ne semble plus représentable par un ensemble de fonctions uniques qui pourraient permettre d'extrapoler ou de prédire son comportement pour un niveau quelconque d'excitation. Le comportement du système ne suit plus la relation usuelle issue du produit de convolution (cf. relation (2.27)) et les notions de réponse impulsionnelle ou de fonction de transfert ne sont plus directement utilisables. Elles ne traduisent alors qu'une représentation linéarisée de la réponse de l'objet et doivent être associées à un niveau de sollicitation donné ou à un intervalle de confiance souvent très difficile à évaluer.

On note la cas fréquemment étudié où la non linéarité est due uniquement à la rigidité. Les équations précédentes deviennent :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{\kappa}(\underline{u}(t)) = \underline{F}(t, \underline{u}(t)) \quad (2.32)$$

où  $\underline{\kappa}$  est un vecteur de fonctions  $\kappa_i(\underline{u})$  régulières, croissantes monotones ( $\frac{\partial \kappa_i(\underline{u})}{\partial \underline{u}} > 0$ ). L'existence de solutions à ce problème a intéressé plusieurs auteurs<sup>(150)</sup>.

### D.1 Les modèles d'hystérésis liés à la plasticité

L'hystérésis dans le comportement d'un matériau traduit le fait que les courbes de charge et de décharge (contrainte-déformation) ne coïncident pas, ce qui peut être dû à la plasticité ou à la viscosité. Elle est liée à des phénomènes de retard qui tiennent compte du passé du matériau. Dans le cas d'une résistance plastique, lorsque la vitesse de déformation s'annule, la dérivée de la contrainte (force) subit une discontinuité, ce qui n'est pas le cas pour une résistance visqueuse. Par conséquent, la présence de deux points anguleux sur un cycle manifeste l'existence d'une composante plastique. Certains auteurs<sup>(151)</sup> limitent la définition de l'hystérésis à

<sup>150</sup>On peut citer les travaux de Bouc et de Bellizzi. Pour simplifier l'existence d'une solution (ces conditions ne sont pas nécessaires), on peut supposer que les fonctions  $\kappa_i(\underline{u})$  sont impaires :  $\kappa_i(-\underline{u}) = -\kappa_i(\underline{u})$  et que la matrice jacobienne dont les termes sont formés des  $\frac{\partial \kappa_i(\underline{u})}{\partial u_j}$  est symétrique.

<sup>151</sup>Visintin donne la définition : *Hysteresis = Rate Independent Memory Effect*.

des effets de mémoire indépendants du module de la vitesse excluant les effets de mémoire de type visqueux. Notons que les phénomènes d'hystérésis sont plus visibles pour des excitations lentement variables. Dans cette section, nous nous limitons à cette classe de modèles afin de représenter le comportement de structures sollicitées hors du domaine élastique.

Parmi les modèles d'hystérésis en mécanique, en 1967, Bouc<sup>(152)</sup> propose une modélisation mathématique originale de l'hystérésis pour un système à un degré de liberté. Suivons une démarche similaire à celle de Bouc : l'idée est de partir de l'expression de la force interne pour un système viscoélastique et d'introduire un temps interne lié au déplacement dans l'expression de la partie visqueuse.

Inspirons nous des travaux de Volterra pour les systèmes héréditaires que nous avons déjà définis dans le paragraphe sur la viscosité linéaire. La force interne  $z(t)$  pour un tel oscillateur peut s'exprimer en fonction de la dérivée du déplacement à l'aide d'un produit de convolution avec un noyau distribution mémoire  $\chi$  héréditaire :

$$z(t) = \int_{t_0}^t \chi(t-t_1) u(t_1) dt = \int_{t_0}^t \varrho(t-t_1) du(t_1) \quad (2.33)$$

où  $\chi = \frac{d\varrho}{dt} = \dot{\varrho}$  ;  $\dot{\varrho}$  désigne la dérivée de  $\varrho$  prise au sens des distributions pour pouvoir tenir compte d'éventuelles discontinuités de  $\varrho$ . On a vu dans le paragraphe sur la viscoélasticité linéaire que le noyau distribution  $\chi$  pouvait être décomposé, de façon générale, en une distribution singulière mesure de Dirac à l'origine et en une distribution régulière  $\chi^{reg(153)}$ . La relation (2.33) devient alors :

$$z(t) = k u(t) + \int_{t_0}^t \chi^{reg}(t-t_1) u(t_1) dt = k u(t) + \int_{t_0}^t \varrho^{reg}(t-t_1) du(t_1) \quad (2.34)$$

où la distribution  $\chi^{reg} = \frac{d\varrho^{reg}}{dt} = \dot{\varrho}^{reg}$  ;  $\dot{\varrho}^{reg}$  désigne la dérivée de  $\varrho^{reg}$  prise au sens des distributions pour pouvoir tenir compte d'éventuelles discontinuités de  $\varrho^{reg}$ .

La fonction associée  $\varrho^{reg}(t)$  à la distribution  $\varrho^{reg}$  joue le rôle de la fonction de relaxation. On fait souvent les hypothèses que  $\varrho^{reg}(t)$  est continue, positive, bornée :  $0 \leq \varrho^{reg}(t) < \infty$  et décroissante :  $\frac{d\varrho^{reg}(t)}{dt} \leq 0$ . Bouc fait l'hypothèse supplémentaire que  $\varrho^{reg}(t)$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ , ce qui entraîne que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho^{reg}(t) = 0$ .

Si on rajoute l'hypothèse de mémoire évanescence, la pente en valeur absolue de la fonction  $\varrho^{reg}$  est alors une fonction décroissante du temps :  $\frac{d|\varrho^{reg}|(\tau)}{d\tau} \leq 0$ .

Finalement, on peut proposer une expression encore plus générale de la force interne, en introduisant un terme supplémentaire  $\kappa[u(t)]$  représentant une force élastique non linéaire :

$$z(t) = k u(t) + \kappa[u(t)] + \int_{t_0}^t \varrho^{reg}(t-t_1) \dot{u}(t_1) dt_1 \quad (2.35)$$

On peut écrire la force interne sous la somme de deux termes : un terme élastique  $z_e(t) = k u(t) + \kappa[u(t)]$  qui dépend du temps par l'intermédiaire de  $u$  et un terme viscoélastique défini sous la forme d'une intégrale dont le noyau est la partie régulière du noyau mémoire :

$$z_h(t) = \int_{t_0}^t \varrho^{reg}(t-t_1) \dot{u}(t_1) dt_1 \quad (2.36)$$

qui génère une hystérésis visqueuse. On obtient finalement la relation force interne-déplacement pour un oscillateur dont le comportement est viscoélastique avec une élasticité non linéaire.

On s'intéresse maintenant et jusqu'à la fin de ce paragraphe à un comportement hystérétique non visqueux, d'origine plastique. Revenons à la partie intégrale  $z_h$  en relation (2.36). Le module  $|\dot{u}|$  de la vitesse ne doit pas intervenir de manière explicite dans l'intégrale. Une façon de prendre en compte cette hypothèse est de faire intervenir à la place du temps réel newtonien  $t$ , un temps interne  $\nu(t)$  tel que  $d\nu(\tau) \geq 0 \forall \tau \geq t_0$ . La différence  $t-t_1$  entre le temps courant réel et un temps précédent est alors remplacé par une différence de temps interne :  $\nu(t) - \nu_1$  avec  $\nu(t) - \nu_1 = \nu(t) - \nu(t_1) = \int_{t_1}^t d\nu(\tau)$ . Cette différence est reliée à l'histoire de la déformation et doit respecter la condition d'indépendance par rapport à la vitesse<sup>(154)</sup>. Bouc propose par exemple de définir le temps interne comme :

<sup>152</sup>Citons l'article : Robert Bouc, 1971, *Modèle mathématique d'hystérésis*, Acustica, Vol. 24, pp. 16-25.

<sup>153</sup> $\mu = k\delta + \chi^{reg}$  où  $k$  est un réel. La distribution régulière  $\chi^{reg}$  est définie par :  $\langle \chi^{reg}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \chi^{reg}(t) \varphi(t) dt$  où  $\chi^{reg}(t)$  est une fonction localement sommable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\varphi(t)$  est une fonction test, qui appartient à l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, à support borné.

<sup>154</sup> $\nu(t)$  doit être une fonction admissible, c'est-à-dire croissante. On a aussi  $\nu(t_0) = \nu_0 = t_0$  et  $\nu(t_f) = t_f$ .



$$d\nu = \left| \frac{du}{dt} \right| dt = \text{sgn}(\dot{u}) du \quad (2.37)$$

Il n'y a plus de composante visqueuse ; on note la partie intégrale :  $z_h(t) = Z_h(\nu(t))$  avec :

$$Z_h(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \varrho^{reg}(\nu - \nu_1) d\mu[u(\nu_1)] \quad (2.38)$$

où  $\nu_0 = \nu(t_0)$  et  $\mu$  désigne la mesure classique de Lebesgue-Stieljes.

On peut aussi introduire dans l'intégrale, une mesure différente de celle de Lebesgue-Stieljes par une mesure de Borel-Stieljes associée à  $\Phi$  <sup>(155)</sup>. La relation (2.38) devient :

$$Z_h(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \varrho^{reg}(\nu - \nu_1) d\mu_{\Phi}[u(\nu_1)] \quad (2.39)$$

Si on suppose  $\Phi$  continue et sa dérivée  $\Phi'$  continue par morceaux et si  $u(\tau)$  est à variation bornée, la relation précédente (2.39) devient :

$$Z_h(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \varrho^{reg}(\nu - \nu_1) \Phi'[u(\nu_1)] u'(\nu_1) d\nu_1 \quad (2.40)$$

La dérivée de  $Z_h(\nu)$  s'écrit :

$$\frac{dZ_h(\nu)}{d\nu} = \varrho^{reg}(0) \Phi'[u(\nu)] u'(\nu) + \int_{\nu_0}^{\nu} \varrho^{reg'}(\nu - \nu_1) d\mu_{\Phi}[u(\nu_1)] \quad (2.41)$$

Finalement, l'expression générale de la force interne, donnée en relation (2.35) s'écrit :

$$z(t) = k u(t) + \kappa [u(t)] + \int_{\nu(t_0)}^{\nu(t)} \varrho^{reg}(\nu(t) - \nu_1) d\mu_{\Phi}[u(\nu_1)]$$

On fait souvent l'hypothèse en viscoélasticité linéaire que la mémoire a une décroissance exponentielle :  $\varrho^{reg}(t) = E_1 e^{-\frac{t}{t_1}} \mathcal{Y}(t)$  qui est l'expression de la fonction de relaxation d'un modèle de Maxwell de rigidité  $E_1 > 0$  et de coefficient d'amortissement  $t_1 E_1 > 0$ .

Si on utilise cette fonction exponentielle décroissante  $\varrho^{reg}(t) = E_1 e^{-\frac{t}{t_1}}$  dans la relation (2.40), on trouve en choisissant la mesure de Lebesgue ( $\Phi[u] = u$ ) :

$$Z_h(\nu) = E_1 \int_{\nu_0}^{\nu} e^{-\frac{\nu - \nu_1}{t_1}} u'(\nu_1) d\nu_1 \quad (2.42)$$

En différentiant cette expression, on obtient <sup>(156)</sup> :

$$dZ_h(\nu) = E_1 du(\nu) - \frac{1}{t_1} Z_h(\nu) d\nu \quad (2.43)$$

Si de plus on impose la définition (2.37) pour le temps interne, la relation (2.43) peut s'écrire en posant  $A = E_1$  et  $\beta = \frac{1}{t_1}$  :

$$dZ_h = (A - \beta Z_h \text{sgn}(\dot{u})) du \quad (2.44)$$

et finalement Bouc propose en 1971, une modélisation mathématique des hystérésis à un degré de liberté qui comprend trois paramètres ( $k, A$  et  $\beta$ ) :

$$\begin{aligned} z(t) &= k u(t) + Z_h(t) \\ \frac{dZ_h}{dt} &= (A - \beta Z_h \text{sgn}(\dot{u})) \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

<sup>155</sup>La mesure de Borel-Stieljes  $\mu_{\Phi}$  associée à  $\Phi$  qui est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , croissante et continue à droite est définie par :  $\mu_{\Phi}([a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$ .

<sup>156</sup>  $\frac{dZ_h(\nu)}{d\nu} = E_1 u'(\nu) - \frac{E_1}{t_1} \int_{\nu_0}^{\nu} e^{-\frac{\nu - \nu_1}{t_1}} d[u(\nu_1)]$   
 $= E_1 u'(\nu) - \frac{1}{t_1} Z_h(\nu)$

On a donc :  $dZ_h(\nu) = E_1 u'(\nu) d\nu - \frac{1}{t_1} Z_h(\nu) d\nu$

Cette modélisation est à la base de nombreux autres modèles concernant les phénomènes d'hystérésis. Par exemple, par analogie avec le modèle de Maxwell généralisé qui est un groupement en parallèle de modèles de Maxwell et d'un ressort a pour fonction de relaxation  $r(t) = \left\{ E_0 + \sum_i E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right\} \mathcal{Y}(t)$ , on peut choisir comme partie régulière du noyau  $\varrho^{reg}(t) = \sum_i A_i e^{-\beta_i t} \mathcal{Y}(t)$  <sup>(157)</sup> avec  $A_i = E_i$  et  $\beta_i = \frac{1}{\tau_i}$ .

L'inconvénient du modèle original est sa portée limitée qui exclut a priori de nombreux types d'hystérésis mais son écriture "simple" permet de le faire évoluer pour qu'il puisse prendre en compte d'autres facteurs plus complexes, soit pour caractériser des cas particuliers de structure.

Ainsi, Wen<sup>(158)</sup> a amélioré le modèle de Bouc en 1976 : il a rajouté une puissance aux équations et a ainsi généralisé les comportements hystérétiques à plusieurs degrés de liberté. Le modèle de Bouc-Wen est donc plus intéressant car il permet de mieux se rapprocher des courbes d'hystérésis grâce à l'introduction d'un paramètre supplémentaire. Cette généralisation permet de prendre en compte un cas limite, le cas bilinéaire.

Choi (H) :

$$r = z + bu \quad (2.45)$$

$$dz = (\alpha - (\gamma + \beta \operatorname{sgn}(du) \operatorname{sgn}(z)) |z|^n) du \quad (2.46)$$

où  $u$  est le déplacement,  $r$  la force,  $z$  la composante hystérétique de la force et  $\alpha, \beta, \gamma, n, b$  des paramètres. Si on se réfère à (2.45) et (2.46), on peut en déduire que :

$$dr = (\alpha + b - (\gamma + \beta \operatorname{sgn}(du) \operatorname{sgn}(r - bu)) |r - bu|^n) du \quad (2.47)$$

On se retrouve alors avec cinq paramètres à identifier :  $\alpha, \beta, \gamma, n$  et  $b$ .

## D.2 Les modèles d'endommagement ou de dégradation des structures

De façon générale, la définition d'un matériau ou d'une structure endommagé(e) est délicate et il est plus facile de définir un matériau ou une structure non endommagé(e)<sup>(159)</sup>. Ainsi, un matériau est vierge de tout endommagement s'il est dépourvu de fissures et de cavités à l'échelle microscopique ou, d'un point de vue plus pragmatique, si son comportement à la déformation est celui du matériau élaboré dans les meilleures conditions. Par conséquent, à l'échelle macroscopique, rien (ou presque) ne permet de distinguer un élément de volume fortement endommagé d'un élément de volume vierge. De plus, le stade final de l'endommagement est la rupture de l'élément de volume, c'est-à-dire l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de l'élément de volume représentatif : 0.1 à 1 mm pour les métaux et les polymères, de l'ordre de 1 cm pour le bois et de 10 cm pour le béton. Le problème d'endommagement et de rupture a intéressé les savants depuis longtemps<sup>(160)</sup>, mais ce n'est que fin des années 1950 que l'on s'est préoccupé de modéliser la détérioration progressive de la matière qui précède la rupture macroscopique avec l'introduction d'une variable continue d'endommagement<sup>(161)</sup>. Reprise dans les années 1970, principalement en France (Lemaitre-Chaboche), cette notion est étendue à d'autres cas de rupture (rupture ductile et rupture par fatigue). Finalement, la théorie de l'endommagement décrit donc l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique.

La limite entre la zone endommagée et la zone saine dans le matériau n'est pas fixe, elle varie sans cesse dans le temps et constitue une frontière libre<sup>162</sup>. D'où l'utilisation des techniques mathématiques sophistiquées élaborées dans le cas des problèmes à frontières libres pour résoudre le problème de l'endommagement. J'ai donc

<sup>157</sup>A la limite lorsque  $i$  tend vers l'infini, la partie régulière tend vers  $\varrho^{reg}(t) = \int_0^\infty E(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$ .

<sup>158</sup>Y.K Wen, 1976, *Method for random vibration of hysteretic systems*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 102, N° 22, pp. 249-263.

<sup>159</sup>Rappelons alors les mots de Jean Lemaitre et de Jean-Louis Chaboche qui comparent l'endommagement à un diable - "L'endommagement, comme le diable, invisible mais redoutable."

<sup>160</sup>Déjà vers 1500, Léonard de Vinci se préoccupait de caractériser la rupture à l'aide de variables mécaniques.

<sup>161</sup>1958 est une date importante pour la mécanique de l'endommagement : Kachanov publie le premier mémoire consacré à une variable continue d'endommagement, imaginée pour le cadre restreint de la rupture par fluage des métaux sous sollicitation unidimensionnelle.

<sup>162</sup>Une frontière libre est une surface mobile qui sépare deux parties d'un matériau ou d'une structure ayant des propriétés physiques différentes. En fonderie, c'est la surface qui sépare la phase solide de la phase liquide. Les problèmes de frontières libres sont présents en optimisation de formes, en contrôle optimal, en changement de phase, en analyse d'instabilité de configuration, en problèmes inverses, etc. Malgré la physique variée des phénomènes en cause, les méthodes d'étude présentent beaucoup d'analogies.

participé avec M. Frémond à l'organisation d'un atelier de travail à Moissac<sup>(163)</sup> sur le thème "Endommagement et Frontières Libres". Le but de cette manifestation était de rassembler des scientifiques intéressés à la fois par la mécanique des milieux continus (mécaniciens) et par les frontières libres (mathématiciens) et finalement d'obtenir une bonne interaction entre l'endommagement et les frontières libres qui en résultent.

La dégradation de la rigidité dans les constructions du génie civil en béton ou en acier ou encore mixte acier+béton, est une des manifestations de l'endommagement fréquemment reconstruées et analysées lors d'essais en laboratoire<sup>(164)</sup> sur des composants de structure soumis habituellement à des chargements cycliques ou sur des ouvrages in situ.

Del Toro<sup>(165)</sup> étudie durant sa thèse le comportement de nœuds d'ossature en béton armé sous sollicitations alternées qui consistent en la succession de salves de cinq sinusoïdes ; les salves successives ayant une amplitude croissante et dont la première est calibrée à 60% du déplacement de la rupture observée lors de l'essai statique. Il montre que dans le domaine élastique, avant l'apparition d'une plastification des armatures, le glissement des armatures et la déformation en cisaillement de la zone centrale entraîne une diminution de la rigidité de la structure. Dans le domaine post-élastique, les chargements cycliques conduisent à une dégradation rapide des caractéristiques structurales, non seulement pour des excitations ayant une amplitude croissante mais aussi lors des cycles avec la même amplitude. Le phénomène de dégradation de la rigidité se traduit par des boucles d'hystérésis dont la forme évolue dans le plan force-déplacement. Ainsi, l'axe "principal" moyen de la boucle notion liée à celles de force interne et de rigidité effective<sup>(166)</sup> pour chaque cycle qui décrit l'évolution de la rigidité de la structure durant le cycle, tourne dans le sens trigonométrique inverse et l'aire de la boucle représente l'énergie dissipée par la structure durant le cycle.

Un modèle d'endommagement à 1 ddl proposé par Iwan et Cifuentes<sup>(167)</sup> a été étudié pour représenter le phénomène de dégradation de la rigidité lors du comportement vibratoire d'une structure. Ce modèle est formé de quatre types d'éléments montés en parallèle : un ressort élastique linéaire, un dash-pot pour la viscosité linéaire, un élément<sup>(168)</sup> de Saint-Venant et d'un ensemble de  $N$  éléments à rupture brutale. Les  $N$  éléments de cet ensemble "endommageable" sont de type Saint-Venant avec comportement élasto-plastique en-dessous d'un certain seuil de déplacement relatif<sup>(169)</sup> ; dès que le seuil est atteint, l'élément "casse" et sa contribution au comportement global est nulle. Le nombre de paramètres est important  $2N + 6$  ; Iwan propose de réduire le nombre de paramètres en fixant  $\beta = 2$  et en supposant que l'énergie maximale absorbée par chaque élément endommageable est constante<sup>(170)</sup> et que les paramètres de déplacement élastique maximal sont en progression

<sup>163</sup>Moissac est une petite ville du Tarn-et-Garonne, sur le Tarn (12 744 hab.) située près du confluent du Tarn avec la Garonne. Elle est célèbre pour son abbatale Saint-Pierre des XIIe et XVe siècles avec son magnifique portail roman et son tympan qui est une image de l'apparition de l'éternel dans l'Apocalypse de Saint-Jean et qu'admirait André Malraux, pour son cloître roman du XIIe aux 76 chapiteaux décoratifs ou historiés et pour son chasselas doré. Moissac est ma ville natale.

<sup>164</sup>Citons par exemple, les travaux de Coladant qui a étudié le comportement de murs-voiles en béton armé (centrales nucléaires) soumis à un cisaillement (rapport d'élançement de 0.5 et des armatures d'acier important entre 0.5 et 0.8%). L'auteur étudie l'évolution de la rigidité normalisée par le maximum de rigidité :  $\frac{K}{K_{max}}$  en fonction de la distorsion  $\gamma$  défini comme le quotient du déplacement horizontal sur la hauteur du mur. Il note une diminution de la rigidité avant même l'apparition de la première fissure.

Il propose des lois de type fraction rationnelle :  $\frac{K}{K_{max}} = \frac{\gamma_0}{\gamma + \gamma_0}$  ou encore  $\frac{K}{K_{max}} = \frac{\gamma_0^2}{\gamma^2 + \gamma_0^2}$  où  $\gamma_0$  est une distorsion de référence ( $\gamma_0 = 4 \text{ ou } 5 \cdot 10^{-4}$ ).

<sup>165</sup>Raül Del TORO RIVERA, 1988, Comportement des nœuds d'ossature en béton armé sous sollicitations alternées, *Thèse de doctorat de l'ENPC, Paris*. Raül fut pendant son séjour en France un collègue et ami depuis l'ENTPE à Lyon.

<sup>166</sup>On introduit la notion de rigidité effective  $k_{effj}$  pour chaque cycle complet  $j$  de vibration défini comme le rapport de la

force interne prise pour la valeur absolue du déplacement maximum  $u_{maxj}$  ( $\dot{u}_{maxj} = 0$ ) :  $k_{effj} = \frac{f(u_{maxj}, 0)}{u_{maxj}}$ . Dans le cas d'un oscillateur linéaire visqueux soumis à une excitation harmonique (cf relation (\*\*)), la boucle d'hystérésis est une ellipse et la rigidité effective est égale à la rigidité de l'oscillateur.

<sup>167</sup>Deux références :

(1) W.D. Iwan, A.O. Cifuentes, 1986, *A model for system identification of degrading structures.*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 14, pp. 877-890.

et

(2) A.O. Cifuentes, W.D. Iwan, 1989, *Non linear system identification based on modeling of restoring force behaviour.*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Vol. 8, N° 1, pp. 2-8.

<sup>168</sup>L'élément de Saint-Venant est formé d'un ressort en série avec un patin ; notons son analogie avec le modèle de Maxwell qui est formé d'un ressort et d'un dash-pot en série.

<sup>169</sup>Le seuil de déplacement relatif pour l'élément endommageable  $i$  vaut :  $\beta u_{yi}$  où  $u_{yi}$  désigne le déplacement élastique maximal de l'élément  $i$ . Deux cas extrêmes :  $\beta = 1$ , l'élément endommageable se comporte comme un élément linéaire jusqu'à la rupture et  $\beta \rightarrow \infty$ , l'élément se comporte comme un élément de Saint-Venant (élasto-plastique) parfait.

<sup>170</sup>Si on note  $\frac{D}{2}$  l'énergie maximale absorbée par chaque élément endommageable, alors la rigidité de l'élément  $i$  vaut  $k_i = \frac{D}{u_{yi}^2}$ .

Finalement,  $D = \frac{(K_0 - K_f)}{\sum_{i=1}^j \frac{1}{u_{yi}^2}}$  où  $j$  représente le nombre d'éléments endommagés ayant atteint le seuil de rupture en fin d'excitation,

$K_0$  et  $K_f$  représentent respectivement la rigidité effective du premier et du dernier cycle de vibration.

géométrique<sup>(171)</sup>. Une fois le nombre d'éléments endommageables fixé, trois paramètres sur les  $2N + 1$  initiaux suffisent alors pour modéliser l'ensemble des éléments endommageables : le déplacement relatif maximal en structure et les rigidités effectives du premier et du dernier cycle de vibration qui sont directement accessibles sur les réponses mesurées. Finalement, il reste cinq paramètres à identifier qui sont la masse et les quatre paramètres du ressort, du dash-pot et du modèle de Saint-Venant.

---

<sup>171</sup> $u_{y_i} = \frac{i}{N} u_{max}$  où  $u_{max}$  désigne le déplacement relatif maximal en structure.

## Chapitre 3

# Représentation des signaux de mesure

Dans notre problème de vibrations de structures, l'entrée est généralement constituée soit de conditions initiales et/ou d'une ou de plusieurs forces extérieures appliquées à la structure et dépendant du temps. L'entrée peut être ou non connue, connue étant pris dans le sens de mesurée.

La sortie qui est tout ou partie des données du problème, est constituée des réponses temporelles dynamiques à cette entrée, locales, mesurées en certains points de la structure étudiée (vibrations libres ou forcées) et obtenues à l'aide de capteurs (habituellement accélérométriques)<sup>(1)</sup>.

La représentation de l'ensemble des données diffère selon qu'elles comprennent à la fois l'entrée et la sortie.

Lorsque, à la fois, l'entrée et la sortie sont mesurées, par analogie au cas des filtres linéaires, on accède généralement à la mesure d'une fonction caractéristique ou fonction de transfert qui relie l'entrée et la sortie.

Pour les filtres linéaires, ces fonctions caractérisent parfaitement l'objet ; on parle de réponses impulsionnelles dans le domaine temporel ou de fonctions de réponse en fréquence (FRF) dans le domaine de Fourier.

Lorsque la connaissance de l'entrée est mal ou non connue, la représentation des données peut être soit temporelle, soit fréquentielle, soit finalement mixte associant le temps et la fréquence. De nos jours, en analyse modale, les démarches temporelle et fréquentielle se développent en parallèle et parfois semblent "se faire concurrence"<sup>(2)</sup>.

La problématique générale de ce chapitre est d'étudier les avantages et les limitations d'une représentation qui combine à la fois le temps et la fréquence pour l'analyse des signaux de mesure.

La recherche effectuée et en cours traite de deux types de réponses dynamiques de structures : les réponses transitoires et les réponses aux excitations ambiantes. La recherche sur l'utilisation de la TOC pour les réponses de structures aux excitations ambiantes ne sera pas présentée dans ce mémoire. On se limitera aux réponses libres de structures linéaires.

Dans de nombreuses situations, les réponses transitoires  $u(t)$  peuvent se mettre sous la forme d'une somme de termes réels, modulés en amplitude et en phase :

$$u(t) = \sum_{r=1}^N A_r(t) \cos(\varphi_r(t)) \quad (3.1)$$

L'inconvénient de cette représentation est que chaque terme de la somme a un caractère non unique. D'où l'introduction de la notion de signal analytique. Une autre caractéristique importante pour le traitement de ces signaux par les représentations temps-fréquence est le caractère asymptotique. Ces notions seront analysées dans ce chapitre.

Ce chapitre est formé de quatre titres.

Le premier précise les notations, introduit les notions énergétiques liées au signal, précise certaines propriétés (causalité, analytisme, asymptoticité) des signaux à l'étude avec une attention particulière pour les réponses libres des structures mécaniques.

---

<sup>1</sup>L'objet est excité en  $N_{ptexc}$  points de sa surface par des forces ou des moments (couples) d'excitations ponctuelles variant dans le temps. On mesure ensuite les réponses à ces sollicitations en  $N_{ptmesu}$  points de sa surface. De façon générale, une réponse de la structure ou une excitation sur la structure admet 6 composantes correspondant aux 6 degrés de liberté du point de mesure. Toutes les composantes ne sont pas forcément mesurées lors d'un essai de vibration.

<sup>2</sup>Ainsi, dans la plupart des ouvrages sur l'analyse modale, on trouve habituellement deux chapitres : l'un consacré aux méthodes temporelles et l'autre aux méthodes fréquentielles. Citons les deux ouvrages de référence suivants : (1) D. J. Ewins, Modal Testing : theory, practice and application, 2nd Edition, 2000, Research Studies Press Ltd : Mechanical Engineering Research Studies : Engineering Dynamics Series, Hertfordshire, 576pp. et (2) N.M. MAIA et J.M.M. SILVA Theoretical and Experimental Modal Analysis 1997, Research Studies Press Ltd :Engineering Dynamics Series, No. 9, Hertfordshire, 488 pp.

Le second s'intéresse aux représentations temps-fréquence. Trois représentations actuellement à l'étude sont présentées et l'accent est mis sur la transformée en ondelettes continue 1D qui a fait l'objet de considérations plus poussées. Trois ondelettes mères à valeurs complexes sont présentées et la résolution temps-fréquence est détaillée pour chacune d'elles. Quelques réflexions sur le calcul numérique de la transformée en ondelettes continue sont finalement données.

Le troisième titre traite de l'utilisation de la transformée en ondelettes continues pour le traitement des signaux asymptotiques et plus précisément des réponses libres de structures mécaniques. Des indicateurs de comportement non linéaire sont proposés et encore à l'étude.

Finalement, le dernier titre parle de fonctions caractéristiques de l'objet. Il suppose qu'à la fois, l'entrée et la sortie sont mesurées. Il est organisé en deux sous-titres correspondant respectivement au domaine temporel (réponse impulsionnelle et force interne) et au domaine fréquentiel (fonctions de transfert et de réponse en fréquence). Une nouvelle fonction appelée fonction d'analyse des singularités, basée sur la transformée en ondelettes de Cauchy d'une fonction de réponse en fréquence, est présentée et analysée ainsi que ses propriétés quand elle est appliquée sur des systèmes linéaires discrétisés.

## A Représentations temporelle et fréquentielle

### A.1 Définitions - Problématique

#### A.1.1 Définitions et notations

Pour la suite, nous allons supposer que  $u(t)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ <sup>(3)</sup>, qu'il est dérivable et que sa dérivée  $\dot{u}(t)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ .

La représentation temporelle est la représentation classique du signal de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui correspond à une décomposition sur la base continue des distributions de Dirac :

$$u(t) = \int_{\mathbb{R}} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

L'information en temps est précise : la valeur  $u(t_1)$  donne l'intensité du signal au temps  $t_1$ , en revanche l'information fréquentielle est nulle :  $u(t_1)$  ne donne aucune information sur le "contenu fréquentiel" de  $u$ . A l'inverse, la représentation fréquentielle qui est la représentation dans la base de Fourier<sup>(4)</sup> :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.3)$$

donne une information précise en fréquence mais ne donne aucune information temporelle. Ainsi, les distributions de Dirac  $\delta(\cdot - \tau)$  sont très localisées en temps et très peu en fréquence tandis que les fonctions  $e^{i\omega t}$  ont des résolutions temporelle et fréquentielle respectivement nulle et infinie. La question qui se pose naturellement est sur l'existence d'une représentation dans laquelle on puisse lire une information mixte : temporelle et fréquentielle. Par conséquent, les scientifiques de la moitié du siècle dernier ont cherché à concevoir des fonctions de base qui se situent à mi-chemin des deux fonctions extrêmes précédentes, de nouvelles fonctions qui auront à la fois une bonne localisation fréquentielle et une bonne localisation temporelle<sup>(5)</sup>.

Pour terminer cette section, nous donnons quelques propriétés importantes.

**1**— Comme  $u(t)$  est réel, sa transformée de Fourier est hermitienne :

$$\hat{u}(-\omega) = \overline{\hat{u}(\omega)}.$$

**2**— De plus, si  $u(t)$  est causal<sup>(6)</sup>  $\Rightarrow \hat{u}(\omega) = \int_0^\infty u(t) e^{-i\omega t} dt$  et

$$\hat{u}(\omega) = i\mathcal{H}[\hat{u}(\omega)]^{(7)} \text{ où } \mathcal{H} \text{ désigne la transformation de Hilbert}^{(8)}. \text{ Par la suite, on supposera que } u(t) \text{ est causal.}$$

**3**— Pour les mécaniciens et les physiciens, les fonctions de carré sommables, qui sont souvent appelées "fonctions à énergie totale finie", caractérisent généralement les réponses des structures réelles. On note donc  $E_u$

<sup>3</sup> $u(t) \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \|u\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt < \infty$  et

$u(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \|u\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt < \infty$ .

<sup>4</sup>On note  $\hat{u}(\omega)$  la transformée de Fourier de  $u(t)$  :  $\hat{u}(\omega) = \mathcal{F}[u](\omega) = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i\omega t} dt$ .

<sup>5</sup>avec la limite dans cette perspective bien connue de l'inégalité d'Heisenberg ! (cf. paragraphe suivant).

<sup>6</sup> $u(t) = 0 \quad \forall t < 0$ .

<sup>7</sup>On peut aussi écrire :  $\Im\{\hat{u}(\omega)\} = \mathcal{H}[\Re\{\hat{u}(\omega)\}]$  ou encore :  $\Re\{\hat{u}(\omega)\} = -\mathcal{H}[\Im\{\hat{u}(\omega)\}]$  où  $\Re$  et  $\Im$  désignent respectivement les parties réelle et imaginaire.

<sup>8</sup> $\mathcal{H}\{u(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{t-s} ds$ .



l'énergie totale dissipée<sup>(9)</sup> par le signal réel  $u(t)$  d'énergie finie. La densité spectrale ou spectre de fréquence est noté  $E_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\widehat{u}(\omega)|^2$ . C'est une fonction paire de  $\omega$ ; dans le spectre des fréquences positives, d'après le théorème<sup>(10)</sup> de Parseval-Plancherel, son aire correspond à l'énergie totale émise<sup>(11)</sup> et son allure à la répartition fréquentielle de cette énergie.

### A.1.2 Historique - Limitations de l'analyse de Fourier

La notion de fréquence apparaît au XVII<sup>ème</sup> siècle à la suite des travaux de Galilée<sup>(12)</sup> et de Mersenne<sup>(13)</sup>. Au XVIII<sup>ème</sup> siècle, l'étude des cordes vibrantes (travaux de d'Alembert, Euler, Bernoulli et Lagrange<sup>(14)</sup>) conduit à préciser les notions de période, de fréquence et de longueur d'onde. Dans le domaine du traitement des signaux, il est habituel de représenter un signal donné sous forme d'une série de signaux périodiques. Ces signaux sont, en premier lieu, à comparer aux sinusoides de durée infinie ou ondes sur lesquelles repose l'analyse de Fourier<sup>(15)</sup> dont la base théorique est donnée en 1822 par Joseph Fourier<sup>(16)</sup>. À une sinusoides, est associée une fréquence "infiniment pure", à laquelle l'on ne peut pas affecter de notion temporelle précise (instant de départ, durée). L'analyse de Fourier nous enseigne qu'un signal quelconque peut s'écrire comme une somme de telles sinusoides, de fréquences et d'amplitudes différentes. Un signal est entièrement caractérisé par l'ensemble des amplitudes des sinusoides, formant ce que l'on appelle sa transformée de Fourier<sup>(17)</sup>. La transformée de Fourier est riche d'informations sur le signal analysé : ainsi, par exemple, si elle n'a que des faibles valeurs pour des valeurs élevées de la variable de fréquence, ceci signifie que le signal varie lentement. Inversement, si elle prend des valeurs importantes pour les hautes fréquences, le signal contient une quantité non-négligeable de hautes fréquences, et donc varie rapidement, au moins dans certaines zones. Nous touchons du doigt l'une de limitations importantes de l'analyse de Fourier usuelle. La transformée de Fourier est incapable de localiser les portions du signal dans lesquelles les variations sont rapides, ni celles où elles sont lentes. La loi de variation de la fréquence en fonction du temps est porteuse d'informations, très difficile à extraire par l'analyse de Fourier comme le dit Yves Meyer<sup>(18)</sup>. Ainsi, les signaux transitoires qui évoluent dans le temps d'une manière imprévisible, ne peuvent plus être représentés comme une superposition d'ondes mais comme une superposition d'ondes de courte durée (gaborettes, ondelettes). Torrèsani<sup>(19)</sup> illustre ces ondes de courte durée par des notes de musique; il serait absurde de représenter les notes d'une partition à l'aide d'une somme d'ondes entretenues depuis l'origine des temps et s'annulant les unes avec les autres avant l'attaque du morceau! L'analyse temps-fréquence fournit souvent une réponse satisfaisante à ce problème. De plus, les structures singulières présentes au sein d'un signal contiennent en général, la majeure partie de l'information. Pendant longtemps, l'analyse de Fourier est restée

<sup>9</sup>  $E_u = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt$ . Le coefficient  $\frac{1}{2}$  a été introduit de façon arbitraire pour des raisons de "sens physique" : énergie cinétique ou énergie potentielle.

<sup>10</sup> La formule de Parseval-Plancherel pour les fonctions  $u(t)$  et  $v(t)$  de  $L^2(\mathbb{R})$  s'écrit :  $\int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\omega)\overline{\widehat{v}(\omega)}d\omega$ . Un cas particulier important est pour  $u = v$  :  $\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega$ .

<sup>11</sup>  $\int_0^\infty E_u(\omega)d\omega = E_u$ . Finalement, on a :  $E_u = \frac{1}{2} \int_0^\infty |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega$ .

<sup>12</sup> Dans ses "Discorsi" de 1638, Galilée énonce la notion de fréquence des vibrations d'une corde, caractérise la hauteur relative de 2 sons par le rapport de leurs fréquences et montre comment la fréquence d'une corde vibrante dépend de sa longueur, de sa tension et de sa masse.

<sup>13</sup> Mersenne détermine en 1636 les rapports des fréquences des notes de la gamme et mesure la vitesse du son. Vers la même époque que Galilée, le Père Mersenne détermine expérimentalement que les nombres de vibrations de deux cordes de même longueur et de même tension sont entre eux comme les racines carrées des masses, et que, pour 2 cordes identiques par la longueur et par la masse, les mêmes nombres sont proportionnels à la racine carrée des poids tendeurs. Il observe qu'une corde tendue fait entendre, en plus de la note fondamentale, ce que Joseph Sauveur appellera les harmoniques supérieures, mais il n'en découvre pas la cause.

<sup>14</sup> Au début du XVIII<sup>ème</sup> siècle, Jean Bernoulli présume à tort que la courbe des vibrations est une cycloïde. Son fils, Daniel Bernoulli, pose les premières équations différentielles du problème sans pouvoir les intégrer. C'est d'Alembert qui, en 1747, explicite et intègre l'équation fondamentale aux dérivées partielles :  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , où  $y(x, t)$  représente l'écart transversal de la particule d'abscisse  $x$  sur la corde, écart qui est à la fois fonction de  $x$  et du temps  $t$  et  $c$  est la vitesse des ondes. Daniel Bernoulli et Lagrange abordèrent l'étude théorique des tuyaux vibrants, tandis que, grâce en particulier à Daniel Bernoulli et à Euler, des phénomènes vibratoires très divers : barreaux, anneaux, cloches, timbales, se trouvaient étudiés mathématiquement et recevaient ainsi un même type de représentation (théorie des équations aux dérivées partielles), indépendant de toute théorie du son. Cette mathématisation fournira néanmoins à l'acoustique un outil fondamental.

<sup>15</sup> L'analyse de Fourier est aussi appelée analyse harmonique ou encore analyse spectrale.

<sup>16</sup> Citons l'ouvrage "Séries de Fourier et ondelettes" de J-P. Kahane, P. G. Lemarié-Rieusset, Cassini, Paris, 1998. Ce livre part de l'équation de la chaleur de J. Fourier (1807) pour arriver à la très récente histoire des ondelettes. La première partie a un caractère historique et fait une grande place à des extraits d'oeuvres marquantes. Le chapitre 1 raconte en quatre pages la vie de Joseph Fourier.

<sup>17</sup> On trouve dans la littérature trois définitions pour la transformée de Fourier qui diffèrent d'un coefficient  $2\pi$  ou  $\sqrt{2\pi}$ . Nous retenons la définition suivante : la transformée de Fourier d'un signal  $u(t)$  est donnée par :

$\widehat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$ .

<sup>18</sup> Citons à ce propos, les mots du Professeur Yves Meyer : "l'impossible quête de la fréquence instantanée".

<sup>19</sup> Bruno Torrèsani a écrit avec Alex Grossmann un article didactique "Les Ondelettes" paru dans Encyclopedia Universalis en 1998.

le principal outil d'analyse de ces singularités. L'analyse de Fourier, parce qu'elle ne donne aucune information de nature locale, se limite à caractériser le degré de régularité global du signal étudié<sup>(20)</sup>.

## A.2 Définitions et exemples : Signaux complexe, analytique et asymptotique associés

Nous allons dans ce paragraphe, nous limiter à une composante de la somme dans la relation (3.1) que nous notons pour la suite :

$$u(t) = A(t) \cos(\varphi(t)) \quad (3.4)$$

où  $A(t)$  est une fonction positive causale (nulle pour des instants négatifs).

On peut d'ailleurs noter que n'importe quel signal réel arbitraire peut se mettre sous cette forme.

Le spectre moyen de puissance de  $u(t)$  vaut :  $E_u = \frac{1}{2} \int_0^\infty A^2(t) \cos^2(\varphi(t)) dt$ .

La dérivée de  $u(t)$  vaut :

$$\dot{u}(t) = A(t) \sqrt{\frac{\dot{A}^2(t)}{A^2(t)} + \dot{\varphi}^2(t)} [\cos(\varphi(t) + \chi(t))] \quad (3.5)$$

où  $\chi(t)$  est tel que :  $tg(\chi(t)) = \frac{\dot{\varphi}(t) A(t)}{\dot{A}(t)}$  (  $\cos(\chi(t)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\dot{A}^2(t)}{A^2(t)} + \dot{\varphi}^2(t)}} \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$  )

Les trois qualificatifs associés à  $u(t)$  à savoir : signal complexe, signal analytique et signal asymptotique seront examinés dans les trois paragraphes suivants et quelques exemples de signaux seront présentés ; en particulier, le cas où on peut mettre  $\varphi(t)$  sous la forme :  $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0(t)$  avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$  et où  $\varphi_0(t)$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

### A.2.1 Signal complexe associé

Le signal complexe ou exponentiel associé à  $u(t)$  est défini par :

$$u_q(t) = A(t) e^{i\varphi(t)} = u(t) + iA(t) \sin(\varphi(t))$$

La partie réelle et imaginaire de  $u_q$  sont en quadrature de phase (en déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ ). On note que comme  $u(t)$ ,  $u_q(t)$  est causal. On déduit que :  $u(t) = \Re \{u_q(t)\}$  où  $\Re \{\cdot\}$  désigne la partie réelle du nombre complexe. On a encore :

$$2\widehat{u}(\omega) = \widehat{u}_q(\omega) + \widehat{\bar{u}}_q(-\omega). \quad (3.6)$$

On vérifie la propriété d'hermitivité<sup>(21)</sup> de  $\widehat{u}(\omega)$  liée au fait que  $u(t)$  est un signal réel. On trouve aussi que :  $|\widehat{u}(\omega)|^2 = |\widehat{u}_q(\omega)|^2 + |\widehat{u}_q(-\omega)|^2 + 2\Re \{\widehat{u}_q(\omega) \widehat{u}_q(-\omega)\}$ . Par suite  $E_u = 2E_{u_q} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \{\widehat{u}_q(\omega) \widehat{u}_q(-\omega)\} d\omega$ .

L'énergie totale de  $u_q(t)$  vaut :  $E_{u_q} = \frac{1}{2} \int_0^\infty |u_q(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty A^2(t) dt$ . Il est immédiat que :  $E_u \leq E_{u_q}$ .

Finalement, la dérivée de  $u_q(t)$  s'écrit :  $\frac{du_q(t)}{dt} = u_q(t) \left( \frac{A'(t)}{A(t)} + i\varphi'(t) \right) \Rightarrow$

$$\frac{u'_q(t)}{u_q(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} + i\varphi'(t).$$

### A.2.2 Signal analytique associé

Il est immédiat que la représentation de  $u(t)$  donnée en relation (3.1) par le couple  $(A(t), \varphi(t))$  n'est pas unique. Un autre choix possible<sup>(22)</sup>, proposé classiquement, est le signal analytique, noté  $u_a(t)$  et qui s'obtient à partir du signal réel  $u(t)$  en annulant les valeurs du spectre pour les fréquences négatives ; ceci a pour effet de "complexifier" le signal initial :

$$u_a(t) = (1 + i\mathcal{H}) \{u(t)\} \quad (3.7)$$

où  $\mathcal{H}$  désigne la transformation de Hilbert<sup>(23)</sup>. On obtient :

$$\widehat{u}_a(\omega) = 2\mathcal{Y}(\omega) \widehat{u}(\omega) = \mathcal{Y}(\omega) (\widehat{u}_q(\omega) + \widehat{\bar{u}}_q(-\omega))$$

où  $\mathcal{Y}(\omega)$  est la fonction de Heaviside.

Finalement, on a<sup>(24)</sup> :  $u(t) = \Re \{u_a(t)\}$

<sup>20</sup>Citons par exemple, le paragraphe "Transformation en ondelettes et analyse des singularités" (pp. 24-28) de l'ouvrage de A. Arnéodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray et J-F. Muzy, 1995. Ondelettes, multifractales et turbulences (de l'ADN aux croissances cristallines), Diderot Editeur, Arts et Sciences.

<sup>21</sup> $\widehat{u}(-\omega) = \widehat{\bar{u}}(\omega)$ .

<sup>22</sup>J. Ville, en 1948, propose un couple canonique  $(A_a(t), \varphi_a(t))$  où  $A_a(t)$  est à valeurs réelles strictement positives et  $\varphi_a$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . On peut alors introduire une notion de fréquence instantanée définie par :  $\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_a}{dt}$ .

<sup>23</sup>On rappelle que la transformée de Fourier de  $\mathcal{H}\{u(t)\}$  vaut :

$\mathcal{H}\{\widehat{u(t)}\}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) \widehat{u}(\omega)$ .

<sup>24</sup> $u_a(t) = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \widehat{u}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ .

L'énergie totale  $E_{u_a}$  de  $u_a(t)$  est le double de celle  $E_u$  de  $u(t)$ <sup>(25)</sup>. On note que l'énergie de la partie réelle de  $u_a(t)$  qui est en fait  $u(t)$  est égale à celle de la partie imaginaire  $\mathcal{H}\{u(t)\} : E_{\Re\{u_a(t)\}} = E_u = E_{\mathcal{H}\{u(t)\}}$ .

On obtient les relations suivantes :  $E_u \leq E_{u_q}$  et  $E_{u_a} = 2E_u \leq 2E_{u_q}$ .

Le signal analytique associé à  $u(t)$  n'a a priori aucune raison d'être égal au signal exponentiel associé ; d'un point de vue physique, on se rapprochera d'autant plus de cette situation que les effets de modulations seront faibles. Nous étudions donc la différence  $u_a(t) - u_q(t)$  qui est imaginaire pur et nous cherchons à majorer sa norme. On trouve que :  $u_a(t) - u_q(t) = -\frac{1}{\pi}i \Im \left\{ \int_{-\infty}^0 \widehat{u}_q(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}$ <sup>(26)</sup>

dont on peut majorer la valeur absolue par :

$$|u_a(t) - u_q(t)| < \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 |\widehat{u}_q(\omega)| d\omega$$

Etudions pour finir, le rapport de l'énergie de la différence :  $u_a(t) - u_q(t)$  sur l'énergie totale du signal  $u(t)$  :  $\frac{\Delta E_{aq}}{E_u}$ . Il constitue une mesure relative de l'approximation de  $u_a(t)$  par  $u_q(t)$ . De façon générale, on trouve que<sup>(27)</sup> :

$$\Delta E_{aq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 |\widehat{u}_q(\omega)|^2 d\omega \quad (3.8)$$

$$\text{et finalement : } \frac{\Delta E_{aq}}{E_u} = \frac{\int_{-\infty}^0 |\widehat{u}_q(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega}.$$

### A.2.3 Signal asymptotique

Le signal  $u(t)$  est dit asymptotique lorsque les variations relatives de  $A(t)$  sont très lentes par rapport à celle de la phase  $\varphi(t)$ , c'est-à-dire :

$$|\dot{\varphi}(t)| \gg \left| \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right| \quad (3.9)$$

Dans ce cas, le signal analytique peut être approché par le signal complexe :  $u_a(t) \approx u_q(t)$ . Le qualificatif "asymptotique" est lié comme son nom l'indique à un comportement à la limite. Plus précisément, Carmona et al.<sup>(28)</sup> montrent le lemme suivant : Soit  $\lambda$  un nombre positif (grand) et soit  $u^{(\lambda)}(t) = A(t) \cos(\lambda\phi(t))$  où  $A(t)$  et  $\phi(t)$  sont respectivement des fonctions deux et quatre fois continûment différentiables, alors le signal analytique  $u_a^{(\lambda)}(t) = A(t) e^{i\lambda\phi(t)} + O(\lambda^{-1.5})$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ .

En pratique, le paramètre  $\lambda$  n'est pas à notre disposition et le lemme précédent peut être interprété par le fait que, lorsque les oscillations provenant du terme de phase  $\varphi(t)$  sont beaucoup rapides que les variations provenant du terme d'amplitude  $A(t)$ , alors

$$u_a(t) \approx u_q(t) = A(t) e^{i\varphi(t)}$$

#### Asymptoticité du signal dérivé

On se pose maintenant la question si  $u(t)$  défini plus haut, est asymptotique, qu'en est-il pour sa dérivée  $\dot{u}(t)$  ?  $u(t)$  est asymptotique donc :  $|\dot{\varphi}(t)| \gg \left| \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right|$ . On en déduit :

$$\dot{u}(t) = A(t) \sqrt{\dot{\varphi}^2} \left[ \cos(\varphi(t) + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\dot{\varphi})) \right] = \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}) A(t) |\dot{\varphi}| \sin(\varphi(t)) = \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}) A(t) \dot{\varphi} \sin(\varphi(t))$$

On suppose ensuite que  $A(t)$  est une fonction décroissante alors  $\operatorname{sgn}(\dot{A}) = -1$  et  $\dot{u}(t) = -A(t) \dot{\varphi} \sin(\varphi(t))$

Si on pose  $B(t) = A(t) \sqrt{\dot{\varphi}^2}$  et  $\psi(t) = \varphi(t) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\dot{\varphi})$

On a alors :  $\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}$  et  $\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t) - \pi \delta(\dot{\varphi}) \ddot{\varphi}$  où  $\delta(\dot{\varphi}) = \sum_n \frac{\delta(t-t_n)}{|\dot{\varphi}(t_n)|}$  avec  $\dot{\varphi}(t_n) = 0$  et  $\ddot{\varphi}(t_n) \neq 0$ . Pour que  $\dot{u}(t)$  soit asymptotique, il faut que  $\left| \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \right|$  soit très inférieur à  $|\dot{\varphi}(t)|$ .

<sup>25</sup>  $E_{u_a} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |u_a(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}_a(\omega)|^2 d\omega = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega = 2E_u$ .

<sup>26</sup>  $u_a(t) - u_q(t) = i \Im \{ u_a(t) \} - \Im \{ u_q(t) \} = i (\mathcal{H}\{u(t)\} - A(t) \sin(\varphi(t))) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 [\widehat{u}_q(\omega) e^{-i\omega t} - \widehat{u}_q(\omega) e^{i\omega t}] d\omega = -\frac{2}{2\pi} i \Im \left\{ \int_{-\infty}^0 \widehat{u}_q(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}$ .

<sup>27</sup>  $\Delta E_{aq} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_a(t) - u_q(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}_a(\omega) - \widehat{u}_q(\omega)|^2 d\omega$ . Or, on sait que :

$\widehat{u}_a(\omega) - \widehat{u}_q(\omega) = \mathcal{V}(\omega)(\widehat{u}_q(\omega) + \widehat{u}_q(-\omega)) - \widehat{u}_q(\omega)$  et par suite  $\Delta E_{aq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 |\widehat{u}_q(\omega)|^2 d\omega$ .

<sup>28</sup> René Carmona a écrit avec B. Torrésani et W-L. Hwang un ouvrage publié en anglais en 1998 par Academic Press : "Practical time-frequency analysis. Gabor and wavelet transforms with an implementation in S".

#### A.2.4 Quelques exemples d'applications analytiques

Examinons le cas où  $\varphi(t) = \omega_1 t + \varphi_0(t)$  avec  $\omega_1 = 2\pi f_1$  avec une phase instantanée  $\varphi_0(t)$  appartenant à  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Le signal  $u(t)$  défini en relation (3.4) s'écrit donc :

$$u(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0(t)) \quad (3.10)$$

Au lieu de la décomposition en amplitude et en phase ; on trouve parfois la décomposition en quadrature :

$$u(t) = m(t) \cos(\omega_1 t) + n(t) \sin(\omega_1 t)$$

avec  $m(t) = A(t) \cos(\varphi_0(t))$  et  $n(t) = -A(t) \sin(\varphi_0(t))$ .

On introduit ensuite la fonction  $u_0(t)$  qui est l'amplitude complexe de  $u(t)$  :  $u_0(t) = A(t)e^{i\varphi_0(t)}$ . On s'intéresse ensuite à la TF de  $u_0(t)$  :  $\widehat{u_0}(\omega) = \mathcal{F}[u_0](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)e^{i\varphi_0(t)} e^{-i\omega t} dt$ .

On déduit de (3.6) que :  $\widehat{u}(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \widehat{u_0}(\omega - \omega_1) + \overline{\widehat{u_0}}(-\omega - \omega_1) \right\}$  et que :

$$\widehat{u_q}(\omega) = \widehat{u_0}(\omega - \omega_1).$$

De plus,  $\Delta E_{aq}$  défini en relation (3.8) s'écrit<sup>(29)</sup> :

$$\Delta E_{aq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\omega_1} |\widehat{u_0}(\omega)|^2 d\omega$$

Si le spectre  $\widehat{u_0}(\omega)$  de  $A(t)e^{i\varphi_0(t)}$  est voisin de zéro pour  $\omega < -\omega_1$ , alors  $\Delta E_{aq} \approx 0$  et par suite, le signal analytique est sensiblement égal au signal complexe associé :  $u_a(t) \approx u_q(t)$

Le rapport  $\frac{\Delta E_{aq}}{E_u}$  vaut alors :  $\frac{\Delta E_{aq}}{E_u} = \frac{\int_{-\infty}^{-\omega_1} |\widehat{u_0}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega}$ .

Nous allons ensuite regarder deux types intéressants de signaux définis en (3.10) : le signal quasi-monochromatique et le signal avec une phase constante.

##### A°) Cas du signal quasi-monochromatique

Un signal quasi-monochromatique ou à bande étroite<sup>(30)</sup> est défini de telle sorte que sa TF est à support borné dans une bande  $\Delta f$  autour de la fréquence  $\pm f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$  telle que :  $\frac{\Delta f}{f_1} \ll 1$ . L'amplitude  $A(t)$  et la phase  $\varphi_0(t)$  d'un signal quasi-monochromatique sont très lentement variables, de telle sorte que sur un intervalle d'observation assez petit (de l'ordre de plusieurs périodes),  $A(t)$  et  $\varphi_0(t)$  sont pratiquement constantes et donc que  $u(t)$  se présente comme un sinus pur.

##### B°) Cas où $\varphi_0(t)$ est une constante

$\varphi_0(t) = -\varphi_0 = Cte$  (notons que lorsque  $\varphi_0 = 0$ , Torrèsani dans son livre (cf. note de bas de page n°(63)), appelle  $u(t) = A(t) \cos(\omega_1 t)$  une ligne spectrale). On a alors :

$$\widehat{u_0}(\omega) = \mathcal{F}[u_0](\omega) = e^{-i\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\varphi_0} \widehat{A}(\omega)$$
 et :

$$\widehat{u_q}(\omega) = e^{-i\varphi_0} \int_0^\infty A(t) e^{i(\omega_1 - \omega)t} dt = \widehat{A}(\omega - \omega_1) e^{-i\varphi_0}.$$

$$\Delta E_{aq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\omega_1} |\widehat{A}(\omega)|^2 d\omega.$$

On a encore :  $\widehat{u}(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\varphi_0} \widehat{A}(\omega - \omega_1) + e^{i\varphi_0} \overline{\widehat{A}}(-\omega - \omega_1) \right\}$ . Lorsque  $\varphi_0 = 0$  (cas de la ligne spectrale), on a :

$$\widehat{u}(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \widehat{A}(\omega - \omega_1) + \overline{\widehat{A}}(-\omega - \omega_1) \right\}.$$

Nous allons ensuite regarder deux formes particulières de l'amplitude  $A(t)$  :

–  $A(t)$  est une fonction  $C^\infty$  à décroissance exponentielle

$A(t) = A_0 e^{-\zeta \omega_0 t} \mathcal{Y}(t)$  avec  $0 < \zeta < 1$  et  $A_0 > 0$  ( $\mathcal{Y}(t)$  désigne la distribution de Heaviside). On a :

$$\widehat{A}(\omega) = \frac{A_0}{\zeta \omega_0 + i\omega} \text{ et d'après ce qui précède :}$$

$$\widehat{u}(\omega) = A_0 \frac{\cos(\varphi_0)(\zeta \omega_0 + i\omega) + \omega_1 \sin(\varphi_0)}{-\omega^2 + 2i\zeta \omega_0 \omega + \omega_1^2 + \zeta^2 \omega_0^2} \text{ et } \Delta E_{aq} = \frac{1}{2\pi} A_0^2 \int_{-\infty}^{-\omega_1} \frac{1}{\zeta^2 \omega_0^2 + \omega^2} d\omega$$

$$= A_0^2 \frac{1}{2\pi \zeta \omega_0} \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega_1}{\zeta \omega_0}\right) \right] = \frac{A_0^2}{2\pi \omega_0} \frac{\text{Arctg}(\zeta \frac{\omega_0}{\omega_1})}{\zeta} \quad (31).$$

Lorsque  $\zeta$  tend vers 0,  $\Delta E_{aq}$  tend vers  $\frac{A_0^2}{2\pi \omega_1}$ .

$$E_{u_q} = \frac{1}{2} \int_0^\infty A^2(t) dt = \frac{A_0^2}{4\zeta \omega_0}.$$

<sup>29</sup>  $\Delta E_{aq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 |\widehat{u_q}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 |\widehat{u_0}(\omega - \omega_1)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\omega_1} |\widehat{u_0}(\omega)|^2 d\omega.$

<sup>30</sup> qualificatif provenant de la théorie du signal (cf. B. Picinbono 1977. Eléments de théorie du signal, Dunod Université, Bordas, Paris).

<sup>31</sup>  $\text{Arctg}(\frac{1}{x}) = -\text{Arctg}(x) + \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x)$

- $A(t)$  est une fonction  $C^\infty$  à décroissance asymptotique rapide  
 $A(t) = A_0 e^{-\frac{\alpha t^2}{2}} \mathcal{Y}(t)$  avec  $\alpha > 0$  .  
 Lorsque  $B(t) = A_0 e^{-\frac{\alpha t^2}{2}}$ , sa transformée de Fourier vaut :  
 $\hat{B}(\omega) = \frac{A_0}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}$   
 et  $\Re \left\{ \hat{A}(\omega) \right\} = \frac{1}{2} \hat{B}(\omega) = \frac{A_0}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}$   
 $E_{u_q} = \frac{1}{2} \int_0^\infty A^2(t) dt = \frac{A_0^2}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha t^2} dt = \frac{A_0^2}{4} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha t^2} dt = \frac{A_0^2}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

### A.3 Réponses libres de structures mécaniques

On considère maintenant un système dynamique à  $N$  degrés de liberté, linéaire avec amortissement visqueux proportionnel, en supposant l'hypothèse de Basile<sup>(32)</sup>. La réponse libre d'un tel système linéaire en termes de déplacement s'exprime comme la superposition des contributions de chaque mode. Le vecteur déplacement  $\underline{u}(t)$  est défini par :

$$\underline{u}(t) = \underline{\Phi} \underline{U}(t) = \sum_{r=1}^N U_r(t) \underline{\phi}_r \quad (3.11)$$

ou encore sous forme des composantes,  $u_j(t)$  désignant la réponse en un point  $j$  du système :

$$u_j(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_{jr} U_r(t) \quad (3.12)$$

La réponse transitoire du mode  $r$ , de type déplacement, noté  $U_r(t)$ , peut se mettre sous la forme :

$$U_r(t) = e^{-\tau_r \omega_r t} \left[ \frac{\dot{U}_r(0) + \tau_r \omega_r U_r(0)}{\tilde{\omega}_r} \sin \tilde{\omega}_r t + U_r(0) \cos \tilde{\omega}_r t \right] \mathcal{Y}(t) \quad (3.13)$$

où  $\tau_r$ ,  $\omega_r$  et  $\tilde{\omega}_r$  sont respectivement pour le mode  $r$ , le taux d'amortissement, la pulsation propre du système conservatif associé et la pseudo-pulsation propre :  $\tilde{\omega}_r = \omega_r \sqrt{1 - \tau_r^2}$ .  $U_r(0)$  et  $\dot{U}_r(0)$  sont respectivement le déplacement et la vitesse initiale pour le mode  $r$  qui s'expriment à partir des déplacements et des vitesses initiaux imposés exprimés dans les coordonnées géométriques du départ :  $U_r(0) = \frac{\underline{\phi}_r^t \underline{M} \underline{u}(0)}{M_r}$  et  $\dot{U}_r(0) = \frac{\underline{\phi}_r^t \underline{M} \underline{v}(0)}{M_r}$  (33).

La relation (3.13) peut ensuite s'écrire :

$$U_r(t) = A_r(t) \cos(\varphi_r(t)) = B_r e^{-\tau_r \omega_r t} \mathcal{Y}(t) \cos(\tilde{\omega}_r t - \psi_r) \quad (3.14)$$

en posant  $A_r(t) = B_r e^{-\tau_r \omega_r t} \mathcal{Y}(t)$  et  $\varphi_r(t) = \tilde{\omega}_r t - \psi_r$  où  $B_r = \sqrt{C_r^2 + D_r^2}$  et  $\tan(\psi_r) = \frac{\tau_r}{\sqrt{1 - \tau_r^2}} + \frac{\dot{U}_r(0)}{\tilde{\omega}_r U_r(0)}$  avec  $C_r = U_r(0)$  et  $D_r = \frac{\dot{U}_r(0) + \tau_r \omega_r U_r(0)}{\tilde{\omega}_r}$ . La condition d'asymptoticité pour  $U_r(t)$  donnée en relation (3.9) se traduit par :

$$\tau_r \omega_r \ll \tilde{\omega}_r \quad (3.15)$$

ce qui est vérifié lorsque  $\tau_r$  est très inférieur à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  qui est la valeur pour laquelle on n'a plus d'amplification dynamique (ce qui est généralement le cas de vibrations de structures réelles).

## B Représentations temps-fréquence

Ce paragraphe est consacré à l'analyse temps-fréquence en dimension 1 . Il est très loin d'être exhaustif et la littérature scientifique sur les transformations ou distributions temps-fréquence est d'ailleurs très abondante. Deux transformations linéaires (transformations en gaborites et en ondelettes) et une transformation non linéaire (la transformation de Wigner -Ville<sup>(34)</sup>) ont retenu mon attention. Seule, l'analyse par ondelettes que j'utilise depuis cinq ans environ pour le traitement des signaux vibratoires, est traitée ici avec plus de détails.

<sup>32</sup>L'hypothèse de Basile affirme que la matrice d'amortissement visqueux est diagonale dans la base des modes propres du système conservatif associé.

<sup>33</sup> $M_r$  désigne la masse généralisée relative au mode  $r$  :  $M_r = \underline{\phi}_r^t \underline{M} \underline{\phi}_r$ .

<sup>34</sup>Ville 1948 Théorie et applications de la notion de signal analytique, Cables et Transmission. Vol. 2A, pp. 61-74.

## B.1 Présentation et définition de trois représentations temps-fréquence

### B.1.1 Analyse continue par gaborettes

Au milieu des années 1940, Gabor suggérait de rendre locale l'analyse de Fourier, en s'aidant de fenêtres<sup>(35)</sup>. En multipliant la fonction étudiée par une fenêtre, on en obtient une version "locale", dont on peut déterminer le contenu fréquentiel par l'analyse de Fourier classique. On renouvelle alors l'opération en déplaçant la fenêtre d'analyse. L'ensemble de ces transformées de Fourier ainsi localisées forme la *transformée de Gabor du signal* :

$$G_g[u](b, \omega) = \langle u, g_{(b, \omega)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} u(t) \bar{g}(t - b) e^{-i\omega(t-b)} dt \quad (3.16)$$

où  $g_{(b, \omega)} = g(t - b)e^{i\omega(t-b)}$  est appelée ondelettes de Gabor ou gaborettes.

et fournit donc une analyse fréquentielle locale. De même que la transformée de Fourier, la transformée de Gabor d'un signal contient toutes les informations portées par le signal. Par conséquent, le signal peut être reconstruit à partir de sa transformée de Gabor comme une somme de gaborettes, qui ne sont autres que des sinusoides localisées par des fenêtres du même type que celles utilisées pour la transformation de Gabor. A chacune de ces gaborettes sont attachés une fréquence et un temps bien déterminés. Le poids d'une gaborette dans un signal n'est autre que la valeur de sa transformée de Gabor pour la fréquence et le temps correspondants. Pour clôturer cette courte présentation, nous allons écrire la transformée de Gabor de  $u(t)$  comme une transformée de Gabor de sa transformée de Fourier  $\hat{u}(\omega)$  (relation obtenue à partir de la formule de Plancherel qui sera détaillée plus loin) :

$$G_g[u](b, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) \bar{g}(\xi - \omega) e^{i\xi b} d\xi \quad (3.17)$$

### B.1.2 Analyse continue par ondelettes

En 1982, pour remédier aux limitations de l'analyse de Fourier<sup>(36)</sup>, Morlet propose une transformation qui permet une représentation du signal dans le temps (ou l'espace) et dans les échelles. Grossmann et Morlet (1984) donnent un cadre rigoureux aux concepts de la nouvelle décomposition temps-échelle. Ils démontrent notamment que pour qu'un signal temporel puisse être décomposé sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions élémentaires localisées en différents instants et ayant des tailles différentes, il faut que la fonction mère présente quelques oscillations et donc ressemble à une ondelette, une 'onde' localisée, par comparaison au terme 'onde' seul, qui signifie une oscillation qui se propage indéfiniment. C'est ainsi que naît la théorie des ondelettes.

L'analyse continue par ondelettes est apparue sous "ses formes modernes" au début des années 80, dans un article de Grossmann et Morlet qui donnent un cadre rigoureux aux concepts de la nouvelle décomposition temps (ou espace)-échelle<sup>(37)</sup>. Ils démontrent notamment que pour que le signal étudié puisse être décomposé sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions élémentaires localisées en différents points de l'espace et ayant des tailles différentes, il faut que la fonction mère présente quelques oscillations et donc ressemble à une ondelette<sup>(38)</sup>. C'est ainsi que naît la théorie des ondelettes. Depuis elle connaît un essor important avec notamment les travaux de Daubechies<sup>(39)</sup> et de Meyer qui établissent le pendant discret de la décomposition en

---

<sup>35</sup>Une fenêtre est une fonction régulière, lentement variable, et bien localisée (ce qui signifie qu'elle est nulle en dehors d'une certaine zone, son support).

<sup>36</sup>En 1982, Morlet est un ingénieur chez Elf Aquitaine, intéressé par l'étude des signaux sismiques intervenant dans la recherche pétrolière. Il étudie le problème suivant : on génère des ondes acoustiques à la surface de la terre et on enregistre les ondes réfléchies ; parmi les données recueillies, Morlet cherche à déterminer l'influence de chaque couche de sédiments au moyen des fréquences instantanées des ondes réfléchies (on utilise le fait que certaines ondes restent piégées à l'intérieur d'une couche et d'autres non). Morlet s'aperçoit que les décompositions spectrales "classiques" telles que la transformation de Fourier, la transformation de Fourier à fenêtre glissante sont mal adaptées à l'analyse de signaux combinant plusieurs échelles caractéristiques. Ainsi les ondelettes de Gabor oscillent trop aux hautes fréquences (introduisant une importante instabilité numérique lors du calcul des coefficients :  $C(m, n) = \int_{\mathbb{R}} u(t) g(t - nb) e^{-im\omega t} dt$  pour  $m \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ) et pas assez aux basses fréquences et de plus ne permettent pas de formule de reconstruction réellement pratique.

<sup>37</sup>A. Grossmann & J. Morlet, 1984. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shapes. SIAM J. Math. Anal. 15, pp. 723-736.

<sup>38</sup>La terminologie "ondelette" est employée par comparaison au terme "onde" qui signifie une oscillation qui se propage indéfiniment.

<sup>39</sup>Aux environs de 1985, Daubechies en collaboration avec Yves Meyer et Alex Grossmann, introduisit une approche discrète qui permet aux fonctions d'être reconstruites à partir d'un ensemble discret de valeurs. En 1992, elle publia le livre : "Ten lectures on wavelets".



ondelettes (approche algorithmique)<sup>(40)</sup>. Les algorithmes rapides<sup>(41)</sup> mis au point, combinés aux bases d'ondelettes à support compact construites par Daubechies font de la transformation en ondelettes un outil numérique puissant<sup>(42)</sup>. En dépit de sa jeunesse, la transformation en ondelettes et ses applications font l'objet d'une abondante littérature. L'un des points essentiels qu'elle nous enseigne est qu'un objet mathématique (fonction, signal, opérateur,...) peut être représenté de multiples façons, chacune de ses représentations permettant de mettre l'accent sur certaines caractéristiques de l'objet étudié.

Soit une fonction  $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  qui va jouer le rôle de l'ondelette mère. On définit la famille d'ondelettes  $\psi_{(b,a)}$  par  $\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ . La transformée en ondelettes continue (TOC) avec l'ondelette mère  $\psi$  d'un signal  $u(t)$  d'énergie finie est donnée par l'intégrale<sup>(43)</sup> :

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u, \psi_{(b,a)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (3.18)$$

La relation (3.18) peut être également vue comme un produit de convolution<sup>(44)</sup> ; ce qui permet d'écrire la TOC sous une forme duale<sup>(45)</sup> où apparaissent les transformées de Fourier de  $u(t)$  et de  $\psi(t)$  :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} e^{i\omega b} d\omega \quad (3.19)$$

### B.1.3 Transformation de Wigner-Ville

On appelle *transformation ou distribution de Wigner-Ville*<sup>(46)</sup> d'un signal  $u(t)$ , la fonction réelle  $W_u(b, \omega)$  continue en l'ensemble des deux variables  $b$  et  $\omega$  définie par :

$$\begin{aligned} W_u(b, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u\left(b + \frac{\tau}{2}\right) \overline{u\left(b - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) \overline{\widehat{u}\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right)} e^{i\xi b} d\xi \end{aligned} \quad (3.20)$$

La construction d'une telle transformation par J. Ville cherchait à déployer l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence et d'obtenir une densité d'énergie qui possède les deux propriétés suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_u(t, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = |u(t)|^2 \quad (3.21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_u(t, \omega) dt = |\widehat{u}(\omega)|^2 \quad (3.22)$$

<sup>40</sup>Ainsi un signal peut être décrit à l'aide d'une famille dénombrable de fonctions élémentaires. En 1986, Yves Meyer et ses collaborateurs proposent des fonctions mères pour lesquelles ces familles sont orthogonales et découvrent ainsi les premières bases orthogonales d'ondelettes. La notion d'analyse multi-résolution introduite peu après par Stéphane Mallat et Yves Meyer permet d'appréhender le problème de construction de telles bases dans un cadre général et conduit à la mise au point d'algorithmes rapides. Citons l'ouvrage suivant : Meyer Y., (1992) Les ondelettes, algorithmes et applications. Armand Collin, Paris.

<sup>41</sup>Comme pour la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes peut aussi donner lieu à des algorithmes efficaces pour le calcul numérique. Ainsi l'invention de la FFT(Fast Fourier Transform) vers le milieu des années 60 par Cooley et Tuckey a fait chuter le nombre d'opérations, pour un signal discret de  $N$  valeurs, de  $N^2$  à  $N \log_2(N)$  (ce qui est un gain considérable!). Pour la transformée en ondelettes, les algorithmes rapides sont basés sur deux opérateurs  $H$  et  $G$ , qui effectuent des convolutions avec deux suites  $h(n)$  et  $g(n)$ . Par exemple, si on se limite à une famille d'ondelettes formant une base orthonormée, les opérateurs  $H$  et  $G$  prennent la forme :  $(Hu)(n) = \sum_k h(k)u(2n-k)$  et  $(Gu)(n) = \sum_k g(k)u(2n-k)$ . Ces convolutions sont des convolutions particulières à cause du facteur 2 intervenant dans le facteur  $u(2n-k)$  traduisant le fait que la convolution est suivie d'un sous-échantillonnage. Ainsi chaque application de ces opérateurs réduit la longueur de la suite d'un facteur 2. Si nous partons d'une suite discrète de  $N$  valeurs de  $u$ , on montre que la complexité de l'algorithme correspondant de décomposition en base d'ondelettes est  $N$ .

<sup>42</sup>De par la richesse des concepts qu'elle met en jeu et l'efficacité de sa mise en œuvre algorithmique, l'analyse en ondelettes a été exploitée avec succès dans des domaines aussi variés que l'analyse fonctionnelle, la physique théorique, l'analyse et le traitement du signal et des images, la théorie des fractales.

<sup>43</sup>Nous avons retenu la normalisation des ondelettes en norme  $L^1(\mathbb{R})$  de telle sorte que  $\|\psi_{(b,a)}\|_1 = \|\psi\|_1$ . On peut trouver différentes normalisation en particulier la normalisation en norme  $L^2(\mathbb{R})$  où  $\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$

<sup>44</sup> $T_\psi[u](b, a) = \mathcal{P}\psi_a * u(b)$  où  $\mathcal{P}$  est l'opérateur de parité défini par  $\mathcal{P}\{u\}(t) = u(-t)$  ;

$*$  désigne le produit de convolution  $(u * v)(t) = \int_{\mathbb{R}} u(\tau)v(t-\tau)d\tau$  et  $\psi_a$  est la dilatation de la fonction  $\psi$  :  $\psi_a = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{\cdot}{a}\right)$ .

<sup>45</sup>Cette relation pour  $a$  fixé peut être vue comme la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{u}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)}$ .

<sup>46</sup>La transformation de Wigner-Ville a été introduite pour la première fois par E. Wigner en 1932 dans le contexte de la mécanique quantique et reprise en 1948 par J. Ville dans la théorie du signal.



Ces deux propriétés sont insuffisantes pour définir la transformation de Wigner-Ville par la relation (3.20)<sup>(47)</sup>. La transformation de Wigner-Ville est bien adaptée pour une classe spécifique de signaux à cause de ses propriétés de localisation optimales<sup>(48)</sup>. Ainsi, la localisation de la transformation de Wigner-Ville est optimale dans le domaine temporel pour les signaux de type Dirac et elle est encore optimale dans le domaine fréquentiel pour des signaux avec une fréquence pure et des chirps linéaires<sup>(49)</sup>.

La transformation de Wigner-Ville est réelle et non-linéaire en  $u$  <sup>(50)</sup>. Elle crée des interactions entre temps éloignés et fréquences éloignées, ce qui rend l'usage de cette " densité " très délicat mais apparemment très efficace pour des signaux de courte durée.

## B.2 Propriétés de la transformée en ondelettes continue

### B.2.1 Propriétés de l'ondelette mère

Une des difficultés dans l'utilisation de la transformée en ondelettes continue (TOC) pour le traitement des signaux mécaniques est le choix d'une ondelette mère.

Un premier critère<sup>(51)</sup> que doit remplir l'ondelette mère est un critère d'**admissibilité** qui exprime que la quantité :

$$\int_0^{+\infty} \left| \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 \frac{da}{a} \quad (3.23)$$

est borné, non nul et ne dépend que du signe de  $\omega$ . On note  $c_\psi$  cette quantité. En fait, si la fonction  $\left| \widehat{\psi}(\cdot) \right|^2$  est paire, alors  $c_\psi$  est constante pour tout  $\omega$  réel. Ceci est réalisée pour les ondelettes mères réelles car  $\widehat{\psi}(\cdot)$  est alors hermitienne<sup>(52)</sup>. Si la fonction  $\left| \widehat{\psi}(\cdot) \right|^2$  est nulle pour les fréquences négatives (on dit alors que l'ondelette mère est **progressive**<sup>(53)</sup>), alors  $c_\psi$  est alors la valeur obtenue pour les  $\omega$  positifs.

Le fait que  $c_\psi$  soit borné entraîne que  $\widehat{\psi}(0) = 0$  ; l'ondelette mère est donc de moyenne nulle. Ce critère est lié à la relation (3.33) que nous verrons par la suite, qui est le pendant de la formule de Parseval-Pancherel lorsque  $c_\psi$  est constant.

Un critère plus fort est d'imposer la nullité des moments d'ordre supérieur, par exemple jusqu'à l'ordre  $p$ <sup>(54)</sup> :

$$\int_{\mathbb{R}} t^i \psi(t) dt = 0 : \text{quel que soit } i \in [0, p-1] \text{ et } \int_{\mathbb{R}} t^p \psi(t) dt \neq 0 \quad (3.24)$$

On introduit ici, une série de coefficients qui nous seront utiles pour la suite :

$$C_i = \int_{\mathbb{R}} |t|^i |\psi(t)| dt \quad (3.25)$$

Lorsque  $|\psi(t)|$  est une fonction paire, on a :  $C_i = 2 \int_0^{+\infty} t^i |\psi(t)| dt$ .

Un autre paramètre caractéristique de l'ondelette mère et utile pour la suite est la valeur de  $\omega$  notée  $\omega^{(1)}$  qui rend maximum le module de sa TF<sup>(55)</sup>.

<sup>47</sup>Il faut y adjoindre deux propriétés dont la formule de "Moyal" :

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_u(t, \omega) W_v(t, \omega) dt d\omega = \left| \int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt \right|^2$$

<sup>48</sup>La représentation de Fourier est optimale dans le domaine de Fourier pour des fonctions harmoniques dans le sens où toute l'énergie de la transformée de Fourier de telles fonctions est localisée en un seul point. L'optimalité rend alors plus facile des tâches comme le débruitage ou la détection.

<sup>49</sup>Un chirp linéaire est un signal  $u(t)$  avec une fréquence qui varie linéairement avec  $t$ . Si  $u(t) = e^{i\omega_0(1+\alpha \frac{t}{2})t}$  alors  $W_v(b, \omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0(1 + \alpha b))$ .

<sup>50</sup> $W_{\alpha u + \beta v}(b, \omega) = \alpha^2 W_u(b, \omega) + \beta^2 W_v(b, \omega) + 2\alpha\beta \Re \{W_{uv}(b, \omega)\}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes réelles arbitraires et  $W_{uv}(b, \omega)$  est l'interdistribution de Wigner-Ville  $W_{uv}(b, \omega) = \int_{\mathbb{R}} u(b + \frac{\tau}{2}) \overline{v(b - \frac{\tau}{2})} e^{-i\omega \tau} d\tau$ .

<sup>51</sup>Ce critère est lié à la relation (3.33) qui, lorsque  $c_\psi$  est une constante, est le pendant de la formule de Parseval-Plancherel pour la TOC.

<sup>52</sup> $\widehat{\psi}(-\Omega) = \overline{\widehat{\psi}(\Omega)} : \forall \Omega \in \mathbb{R}$ .

<sup>53</sup>Une fonction  $\psi(t)$  est progressive si sa transformée de Fourier  $\widehat{\psi}(\omega)$  est nulle pour  $\omega < 0$ .

<sup>54</sup>Cette condition est équivalente à l'existence d'une fonction  $\phi$ , définie à une constante multiplicative près, continue et bornée avec  $\phi(0) = 1$  et  $\phi(\infty) = 0$  telle que :  $\widehat{\psi}(\omega) = \omega^p \phi(\omega)$ .

<sup>55</sup> $\omega^{(1)} = \max_{\omega} \left| \widehat{\psi}(\omega) \right|$  (norme  $L^\infty(\mathbb{R})$ ).

### B.2.2 Localisation temps-fréquence

Les ondelettes mères sont caractérisées par leurs propriétés de localisation temporelle et fréquentielle. On utilise généralement pour définir les localisations temporelle et fréquentielle, les notions de moyennes et d'écart-types temporel et fréquentiel qui sont définis respectivement, dans le domaine temporel, à la densité de probabilité :

$\varphi_1(t) = \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2}$  et dans le domaine fréquentiel, à la densité de probabilité :  $\varphi_2(\omega) = \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2}$ . On note que ces

fonctions sont définies au sens de la norme  $L^2(\mathbb{R})$  (au sens des moindres carrés).

Par conséquent, on définit respectivement la moyenne temporelle :  $t_\psi$ , la moyenne fréquentielle :  $\omega_\psi$ , l'écart-type temporel  $\Delta t_\psi$  et l'écart-type fréquentiel :  $\Delta \omega_\psi$  par les relations suivantes :

$$t_\psi = \int_{\mathbb{R}} t \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \quad (3.26)$$

$$\omega_\psi = \int_{\mathbb{R}} \omega \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \quad (3.27)$$

$$\Delta t_\psi = \frac{1}{\|\psi\|_2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t_\psi)^2 |\psi(t)|^2 dt} \quad (3.28)$$

$$\Delta \omega_\psi = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega_\psi)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.29)$$

On peut aussi calculer les moments statistiques centrés d'ordre supérieur temporel et fréquentiel<sup>(56)</sup>, notés respectivement  $m_{pt}$  et  $m_{p\omega}$ . Les moments sont parfois réduits respectivement par la division de  $\Delta t_\psi^p$  dans le domaine temporel ou par la division de  $\Delta \omega_\psi^p$  dans le domaine fréquentiel ; on les note respectivement  $m'_{pt}$  et  $m'_{p\omega}$ <sup>(57)</sup>. Le moment d'ordre 3<sup>(58)</sup> caractérise l'asymétrie de la courbe de densité de probabilité et le moment d'ordre 4<sup>(59)</sup> permet d'estimer son aplatissement.

On fait ensuite, la remarque que l'on pourrait reprendre la démarche précédente avec une autre norme. S'il choisit la norme  $L^1(\mathbb{R})$ , les nouvelles densités de probabilité s'écrivent alors respectivement :  $\varphi_3(t) = \frac{|\psi(t)|}{\|\psi\|_1}$  dans le domaine temporel, et  $\varphi_4(\omega) = \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{\|\hat{\psi}\|_1}$  dans le domaine fréquentiel. Les coefficients précédemment introduits en relation (3.25) sont alors, à une constante de normalisation près, les moments absolus d'ordre  $i$  autour de 0.

Suite aux définitions précédentes (cf relations (3.26) , (3.27) , (3.28) et (3.29)), on dit que la fonction  $\psi$  est localisée au point de phase  $(t_\psi, \omega_\psi)$  avec une incertitude  $\mu(\psi) := \Delta t_\psi \Delta \omega_\psi$ . Le principe d'incertitude d'Heisenberg, énonce que  $\mu(\psi) \geq \frac{1}{2}$  ce qui entraîne qu'une amélioration de la localisation temporelle (i.e. une diminution de  $\Delta t_\psi$ ) va être accompagnée par une détérioration de la localisation fréquentielle (i.e., une augmentation de  $\Delta \omega_\psi$ )<sup>(60)</sup>.

A la fonction mère  $\psi$ <sup>(61)</sup>, on associe un pavé temps-fréquence qui est un rectangle dans le plan  $(t, \omega)$  centré en  $(t_\psi, \omega_\psi)$  et de dimensions  $\Delta t_\psi \times \Delta \omega_\psi$ . Ce pavé est une représentation intuitive de la couverture en temps-fréquence de la fonction  $\psi$ . On associe ensuite à la famille de fonctions (pour la TOC, la famille d'ondelettes  $\psi_{(b,a)}$ ), un pavage du plan temps-fréquence qui recouvre le plan  $(t, \omega)$  par des rectangles de couverture des fonctions de base. Cette représentation a un aspect arbitraire, d'autant qu'aucun résultat ne lie le fait qu'une famille soit une base, au fait que les pavés temps-fréquence de la famille recouvre le plan. Par exemple, le pavage

<sup>56</sup>Dans le domaine temporel, le moment centré d'ordre  $p$  est défini par :

$m_{pt} = \int_{\mathbb{R}} (t - t_\psi)^p \varphi_1(t) dt$ . Dans le domaine fréquentiel, le moment centré d'ordre  $p$  est défini par :  $m_{p\omega} = \int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega_\psi)^p \varphi_2(\omega) d\omega$ .

<sup>57</sup> $m'_{pt} = \frac{1}{\Delta t_\psi^p} m_{pt}$  et  $m'_{p\omega} = \frac{1}{\Delta \omega_\psi^p} m_{p\omega}$

<sup>58</sup>Le moment d'ordre 3 réduit vaut 0 pour un processus gaussien. S'il est positif, la courbe de densité de probabilité présente autour une dissymétrie accentuée vers la droite du pic et s'il est négatif, une dissymétrie accentuée vers la gauche du pic.

<sup>59</sup>Pour un processus gaussien, le moment d'ordre 4 réduit vaut 3. Pour un sinus pur, il vaut 1.5. S'il est supérieur à 3, cela indique la présence de pics avec de valeur élevée (plus que dans le cas gaussien) ; s'il est inférieur à 3, cela indique une tendance à l'écrêtage du signal ou à l'existence d'une composante harmonique.

<sup>60</sup>L'inégalité d'Heisenberg interdit de trouver une fonction avec des largeurs temporelle et fréquentielle toutes deux aussi petites que l'on veut. Les seules fonctions qui réalisent le minimum de la limite théorique  $\mu(\psi) = \frac{1}{2}$  sont les fonctions gaussiennes translatées et modulées :  $A e^{-(t-t_0)^2} e^{i\omega_0 t}$

<sup>61</sup>On peut généraliser cette représentation en pavage du plan temps-fréquence à n'importe quelle fonction  $\psi$ .

temps-fréquence correspondant aux bases de fonctions de Dirac et aux bases de fonctions de Fourier sont des pavages par des rectangles infiniment fins et allongés qui sont respectivement verticaux pour les fonctions de Dirac et horizontaux pour les fonctions de Fourier.

Pour la TOC, on relie la pulsation variable  $\omega$  au paramètre d'échelle par :  $\omega = \frac{\omega_\psi}{a}$ . Les résolutions locales de la TOC pour  $\lambda = (b, a)$  fixé, en temps  $\Delta t$  et en fréquence  $\Delta\omega$  sont définies à partir des écart-types de l'ondelette mère par :

$$\Delta t = a \Delta t_\psi \quad \text{et} \quad \Delta\omega = \frac{\Delta\omega_\psi}{a} \quad (3.30)$$

Ainsi, connaissant  $t_\psi$  et  $\Delta t_\psi$  ainsi que  $\omega_\psi$  et  $\Delta\omega_\psi$ , on définit un découpage de l'espace temps-fréquence en pavés rectangles :

$$[b + t_\psi - a \Delta t_\psi, b + a t_\psi + a \Delta t_\psi] \times [\frac{\omega_\psi}{a} - \frac{\Delta\omega_\psi}{a}, \frac{\omega_\psi}{a} + \frac{\Delta\omega_\psi}{a}] \quad (3.31)$$

dont la largeur de la fenêtre temporelle vaut :  $2a \Delta t_\psi$  et celle de la fenêtre fréquentielle :  $\frac{2\Delta\omega_\psi}{a}$ . On obtient ainsi le domaine de localisation temps-fréquence pour la TOC autour du point  $(b, a)$ .

Lors de la détermination des fréquences instantanées, en relation avec la méthode de la demi-puissance, on peut introduire la notion du facteur de qualité  $Q$  défini comme le rapport de la pulsation moyenne  $\omega_\psi$  à la largeur de l'intervalle  $2\Delta\omega_\psi$  :

$$Q = \frac{\frac{\omega_\psi}{a}}{2\frac{\Delta\omega_\psi}{a}} = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} \quad (3.32)$$

ou de son inverse  $\gamma = \frac{1}{Q}$  qui définit une largeur de bande relative du filtre que représente la TOC.  $Q$  et  $\gamma$  sont indépendants de  $a$ . L'analyse précédente sur le facteur de qualité fait référence à l'analyse fréquentielle conventionnelle fondée sur les filtres à  $Q$  constant. Un autre paramètre qui permet de caractériser la banque de filtres est la fraction d'un octave<sup>(62)</sup> qui signifie qu'un filtre de 1/Nème d'octave a une largeur de bande de  $1/N$  d'un octave.

### B.2.3 Propriétés énergétiques pour la transformée en ondelettes

Nous allons écrire pour la transformée en ondelettes du signal  $u(t)$  à énergie finie, le pendant de la formule de Parseval-Plancherel donné pour la transformée de Fourier<sup>(63)</sup> :

$$\iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} |T_\psi[u](b, a)|^2 \frac{da}{a} db = c_\psi \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt = 2c_\psi E_u \quad (3.33)$$

La relation (3.33) découle de la relation (3.19) traduisant le fait que la TOC est la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{u}(\omega) \widehat{\psi}(a\omega)$  et après utilisation du théorème de Parseval sur  $|T_\psi[u](\cdot, a)|^2$  et celle du théorème de Fubini<sup>(64)</sup>. Posons  $a = \frac{\omega_0}{\omega}$  où  $\omega_0$  est une pulsation caractéristique de l'ondelette-mère, la relation précédente (3.33) devient :

$$\iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \left| T_\psi[u]\left(b, \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right|^2 \frac{d\omega}{\omega} db = 2c_\psi E_u \quad (3.34)$$

Posons  $\widetilde{E}_{T_\psi[u]}(b, \omega) = \frac{1}{2c_\psi \omega} |T_\psi[u](b, \frac{\omega_0}{\omega})|^2$  qui représente un spectre local de l'ondelette à partir duquel on peut définir un spectre moyen de l'ondelette  $\widetilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega)$  :

$$\widetilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega) = \frac{1}{2c_\psi \omega} \int_{\mathbb{R}} \left| T_\psi[u]\left(b, \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right|^2 db \quad (3.35)$$

Or  $T_\psi[u](b, a)$  pour  $a$  fixé, peut être vu comme la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{u}(\cdot) \widehat{\psi}(a\cdot)$  ; la formule de Parseval-Plancherel peut s'appliquer et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| T_\psi[u]\left(b, \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right|^2 db &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\omega')|^2 \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\omega_0}{\omega} \omega'\right) \right|^2 d\omega' \\ &= \int_{\mathbb{R}} E_u(\omega') \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\omega_0}{\omega} \omega'\right) \right|^2 d\omega' \end{aligned} \quad (3.36)$$

<sup>62</sup>Un intervalle de 1/Nème d'octave avec une pulsation centrale  $\omega_f$  est un intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$  avec  $\omega_1 = 2^{-\frac{1}{2N}} \omega_f$  et  $\omega_2 = 2^{\frac{1}{2N}} \omega_f$ .

<sup>63</sup>Bruno Torrèsani, 1995, Analyse continue par ondelettes, InterEditions et CNRS Editions, (cf. pp. 22).

<sup>64</sup> $\iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} |T_\psi[u](b, a)|^2 \frac{da}{a} db = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} |\widehat{u}(\omega)|^2 |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{a}$   
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}_+^*} |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{a} |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} c_\psi \int_{\mathbb{R}_+^*} |\widehat{u}(\omega)|^2 d\omega = c_\psi \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt.$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega) &= \frac{1}{2c_\psi\omega} \int_{\mathbb{R}} E_u(\omega') \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\omega'\right) \right|^2 d\omega' \\ &= \frac{1}{2c_\psi\omega} \left\{ \int_0^{+\infty} E_u(\omega') \left( \left| \widehat{\psi}\left(\frac{-\omega_0}{\omega}\omega'\right) \right|^2 + \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\omega'\right) \right|^2 \right) d\omega' \right\}\end{aligned}$$

On note que le comportement du spectre moyen de l'ondelette aux “grandes” pulsations dépend fortement du comportement de la T.F. de l'ondelette mère aux “petites” pulsations.

Pour des ondelettes réelles, la formule précédente s'écrit :

$$\tilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega) = \frac{1}{c_\psi\omega} \left\{ \int_0^{+\infty} E_u(\omega') \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\omega'\right) \right|^2 d\omega' \right\}.$$

Pour des ondelettes mères complexes **progressives**<sup>(65)</sup>, elle devient :

$$\tilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega) = \frac{1}{2c_\psi\omega} \left\{ \int_0^{+\infty} E_u(\omega') \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\omega'\right) \right|^2 d\omega' \right\}.$$

#### *Autre représentation énergétique de la TOC*

Carmona propose de définir une autre représentation énergétique en introduisant la nouvelle variable  $z$  réelle :  $z = Ln(a)$  et par conséquent  $dz = \frac{da}{a}$ . La relation (3.33) devient :

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |T_\psi[u](b, e^z)|^2 dz db = 2c_\psi E_u \quad (3.37)$$

On peut alors poser  $M(b, z) = \frac{1}{2c_\psi} |T_\psi[u](b, e^z)|^2$  comme le nouveau spectre local de l'ondelette. Comme précédemment, on peut définir un spectre moyen de l'ondelette  $\widetilde{M}(z)$  :

$$\widetilde{M}(z) = \frac{1}{2c_\psi} \int_{\mathbb{R}} |T_\psi[u](b, e^z)|^2 db \quad (3.38)$$

La formule de Parseval-Plancherel peut s'appliquer et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} |T_\psi[u](b, e^z)|^2 db = 2 \int_0^\infty E_u(\omega) \left| \widehat{\psi}(e^z\omega) \right|^2 d\omega$$

$$\text{Finalement, on a : } \widetilde{M}(z) = \frac{1}{2c_\psi} \int_{\mathbb{R}} E_u(\omega) \left| \widehat{\psi}(e^z\omega) \right|^2 d\omega.$$

Carmona définit si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , le spectre de l'ondelette de  $p$  par :  $E_{p, T_\psi}(b, a) = \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}^2} \mathbb{E} \left\{ |T_\psi[p](b, a)|^2 \right\}$ .

#### *Comportement à l'infini de la densité spectrale $\tilde{E}_{T_\psi[u]}(b, \omega)$ de la TOC*

Considérons le spectre de fréquence d'un signal  $u(t)$  qui se comporte pour des fréquences élevées :  $\omega > \omega_l > 0$  de telle façon que :  $E_u(\omega) \sim \omega^{-\alpha}$  avec  $\alpha > 1$ . Si on suppose que l'ondelette mère vérifie la relation (3.24) avec ses  $p$  premiers moments nuls alors on montre<sup>(66)</sup> que :

- si  $\alpha < 2p + 1$  alors  $\tilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega) \sim \omega^{-\alpha}$ .
- si  $\alpha > 2p + 1$  alors  $\tilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega) \sim \omega^{-(2p+1)}$ .
- si  $\alpha = 2p + 1$  alors  $\tilde{E}_{T_\psi[u]}(\omega) \sim \omega^{-\alpha} \ln \omega$ .

#### **B.2.4 Transformée en ondelettes de signaux particuliers**

Nous allons donner l'expression analytique de la TOC pour deux types de signaux :

- Si  $\hat{u}(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$  ( $\omega_1 > 0$ ) alors la relation (3.19) devient :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\psi}(a\omega_1) e^{i\omega_1 b}.$$

$$\text{On déduit que : } |T_\psi[u](b, a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \widehat{\psi}(a\omega_1) \right|.$$

Finalement lorsque  $u(t) = \cos(\omega_1 t)$ , on a :  $\hat{u}(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$  et par suite :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2} \left( \widehat{\psi}(a\omega_1) e^{i\omega_1 b} + \widehat{\psi}(-a\omega_1) e^{-i\omega_1 b} \right). \text{ Si l'ondelette analysante est progressive, alors}$$

<sup>65</sup>On rappelle qu'une fonction  $\psi(t)$  est progressive si sa transformée de Fourier  $\widehat{\psi}(\omega)$  est nulle pour  $\omega < 0$ .

<sup>66</sup>Valérie Perrier, Thierry Philipovitch & Claude Basdevant, Wavelet Spectra compared to Fourier Spectra, J. Math. Phys. 36(3), pp.1506-1519 (1995).

$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2} \widehat{\psi}(a\omega_1) e^{i\omega_1 b}$  et  $|T_\psi[u](b, a)| = \frac{1}{2} |\widehat{\psi}(a\omega_1)|$ . Cette dernière expression est indépendante de  $b$ ; elle est maximum lorsque  $a\omega_1 = \max_\omega |\widehat{\psi}(\omega)| = \omega^{(1)}$ . Par conséquent, lorsque  $a = \frac{\omega^{(1)}}{\omega_1}$ , la TOC est maximum ce qui représente dans le plan temps-échelle  $(b, a)$ , une demi-droite horizontale et introduit les notions d'arête et de squelette qui seront généralisées plus loin, pour un signal modulé en amplitude et en phase.

– Si  $\widehat{u}(\omega) = C^{te}$  alors la relation (3.19) devient :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} C^{te} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

et par suite :  $T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{a} C^{te} \widehat{\psi}\left(-\frac{b}{a}\right)$

### B.2.5 Expression de la TOC de $\frac{du(t)}{dt}$

A partir de la relation (3.19), on trouve<sup>(67)</sup> :

$$T_\psi\left[\frac{du}{dt}\right](b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \widehat{u}(\omega) \widehat{\psi}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial b} (T_\psi[u])(b, a) = T_\psi\left[\frac{du}{dt}\right](b, a) \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial b^2} (T_\psi[u])(b, a) = T_\psi\left[\frac{d^2 u}{dt^2}\right](b, a)$$

A partir de la relation (3.19), on déduit aussi que<sup>(68)</sup> :

$$\frac{\partial}{\partial a} (T_\psi[u])(b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega \widehat{u}(\omega) \widehat{t\psi}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

Si  $t\psi(t)$  peut jouer le rôle d'une ondelette mère, alors la relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial a} (T_\psi[u])(b, a) = -T_{t\psi}\left[\frac{du}{dt}\right](b, a)$$

## B.3 Présentation de trois ondelettes mères 1D

Nous proposons dans cette section trois types d'ondelettes complexes en dimension 1 que nous avons utilisées pour le traitement des signaux mécaniques. Deux sont classiques : les ondelettes de Morlet  $\psi_{\beta\sigma}(t)$  et les ondelettes de Cauchy  $\psi_n(t)$  et le dernier type est nouveau, construit tout particulièrement pour l'étude des signaux mécaniques libres et que nous appellerons les ondelettes "exponentielles".

### B.3.1 Les ondelettes de Morlet

Les ondelettes de Morlet dans leur définition générale, sont des gaussiennes simplement modulées :

$$\psi_{\beta\sigma}(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{i\beta t}$$

où  $\beta$  est un paramètre fréquentiel contrôlant le "nombre"<sup>(69)</sup> des oscillations de l'ondelette dans son enveloppe Gaussienne et  $\sigma$  contrôle la taille de l'enveloppe. La transformée de Fourier de  $\psi_{\beta\sigma}$ <sup>(70)</sup> vaut :

$$\widehat{\psi}_{\beta\sigma}(\omega) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(\omega-\beta)^2\sigma^2}{2}}$$

On a donc :

$$\frac{d}{d\omega} \left( \ln \widehat{\psi}_{\beta\sigma}(\omega) \right) = -(\omega - \beta)\sigma^2 \quad (3.39)$$

La fonction  $\psi_{\beta\sigma}$  n'est pas admissible au sens strict du terme<sup>(71)</sup>; cependant, pour  $\beta\sigma$  assez grand ( $\beta\sigma > 5$ ), l'intégrale de  $\psi_{\beta\sigma}$  sur  $\mathbb{R}$  est assez petite pour permettre d'affirmer que l'ondelette de Morlet est numériquement admissible. Elle est optimalement localisée dans le plan temps-fréquence (elle minimise l'inégalité d'Heisenberg). Les coefficients  $C_i$  définis en (3.46) s'écrivent :

$$C_{2p} = 2^{p+\frac{1}{2}} \sigma^{2p+1} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \quad (3.40)$$

$$C_{2p+1} = 2^{p+1} \sigma^{2(p+1)} p! \quad (3.41)$$

<sup>67</sup>La T.F. de  $\frac{du(t)}{dt}$  vaut :  $i\omega \widehat{u}(\omega)$ .

<sup>68</sup>On a :  $\frac{\partial}{\partial a} (T_\psi[u])(b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \widehat{u}(\omega) \frac{d\widehat{\psi}}{da}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$  et en utilisant

$\frac{d}{da} \widehat{u}(\omega) = -i(t u(t))(\omega)$ , on obtient la relation proposée.

<sup>69</sup>Le "nombre" est écrit entre guillemets car si visuellement il y a un nombre fini d'oscillations; en fait, il y en a toujours une infinité.

<sup>70</sup>La T.F. de  $e^{-p t^2}$  avec  $p > 0$  vaut :  $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}}$ .

<sup>71</sup> $\widehat{\psi}_{\beta\sigma}(0) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\beta^2\sigma^2}{2}} \neq 0$ ; pour  $\beta\sigma = 5$ , on a :  $\widehat{\psi}_5(0) = 9.34 \cdot 10^{-6}$ .

où  $\Gamma$  désigne la fonction eulérienne gamma <sup>(72)</sup>. Très souvent, dans la littérature, on trouve  $\sigma = 1$  <sup>(73)</sup>.

### B.3.2 Les ondelettes de Cauchy

Ce sont des ondelettes complexes **progressives** <sup>(74)</sup> définies par :

$$\psi_n(t) = \frac{1}{(1-it)^{n+1}} = \left( \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \right)^{n+1} e^{i(n+1)\text{Arctg}(t)} \quad (3.42)$$

Dans cette définition, les ondelettes sont normalisées en norme  $L^\infty$  :

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \{|\psi_n(t)|\} = |\psi_n(0)| = 1.$$

On vérifie ensuite aisément que  $\psi_n(t)$  a la symétrie hermitique <sup>(75)</sup>. La transformée de Fourier de  $\psi_n(t)$  vaut :

$$\hat{\psi}_n(\omega) = 2\pi \frac{\omega^n}{n!} e^{-\omega} \mathcal{Y}(\omega) \quad (3.43)$$

où  $\mathcal{Y}$  est la fonction de Heaviside. On note que  $\hat{\psi}_n(0) = 0$  si  $n \geq 1$  ; par conséquent,  $n \geq 1$  pour que l'ondelette mère soit admissible.

On peut encore écrire l'ondelette mère sous la forme :  $\psi_n(t) = \frac{(-i)^{n-1}}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{1}{t+i} \right)$ . On en déduit la relation de récurrence suivante :

$\psi_{n+1}(t) = \frac{(-i)}{n+1} \frac{d}{dt} (\psi_n(t))$ . On en déduit pour la TF de  $\psi_{n+1}$  :

$$\hat{\psi}_{n+1}(\omega) = \frac{\omega}{n+1} \hat{\psi}_n(\omega) \text{ et par suite : } \hat{\psi}_{n+1}(\omega) = \frac{\omega^n}{(n+1)!} \hat{\psi}_1(\omega).$$

Calculons, ensuite, la dérivée première de  $\hat{\psi}_n(\omega)$ . On note que cette dérivée ressemble à une formule de récurrence de différences finies :

$$\frac{d}{d\omega} \left( \hat{\psi}_n(\omega) \right) = \hat{\psi}_{n-1}(\omega) - \hat{\psi}_n(\omega) \quad (3.44)$$

La dérivée seconde s'en déduit :

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left( \hat{\psi}_n(\omega) \right) = \hat{\psi}_{n-2}(\omega) - 2\hat{\psi}_{n-1}(\omega) + \hat{\psi}_n(\omega)$$

On a aussi :

$$\frac{d}{d\omega} \left( \ln \hat{\psi}_n(\omega) \right) = \frac{n}{\omega} - 1 \quad (3.45)$$

Le coefficient d'admissibilité  $c_\psi$  défini en relation (3.23) s'écrit :

$$c_{\psi_n} = \frac{4\pi^2}{(n!)^2} \int_0^\infty \omega^{2n-1} e^{-2\omega} d\omega = 4\pi^2 \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \quad (76) \text{ et par suite, on trouve :}$$

$$\left\| \hat{\psi}_n \right\|_{L^2}^2 = 2\pi \left\| \psi_n \right\|_{L^2}^2 = 2\pi^2 \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = n c_{\psi_n}.$$

*Calcul des coefficients  $C_i$*

Les coefficients  $C_i$  définis en relation (3.25) peuvent s'écrire pour l'ondelette de Cauchy  $\psi_n$  sous la forme en posant  $m = n - i - 1$  :

$$C_i = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(\theta) \sin^i(\theta) d\theta \quad (3.46)$$

Plusieurs cas sont à envisager :

–  $m > 0$  et  $i$  est impair  $i = 2p + 1$  ( $n > 2p + 2$ ), on obtient :

$$C_{2p+1} = \frac{2^{p+1} p!}{(n-1)(n-3)\dots(n-2p+1)(n-2p-1)} \quad (3.47)$$

En particulier, on trouve que  $C_1 = \frac{2}{(n-1)}$ .

<sup>72</sup>  $\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-1)}{2^p} \sqrt{\pi}$

<sup>73</sup> L'ondelette s'écrit alors :  $\psi_\beta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\beta t}$  et sa transformée de Fourier vaut :

$\hat{\psi}_\beta(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\omega-\beta)^2}{2}}$ . Pour  $\beta \geq 5$ ,  $\hat{\psi}_\beta(0)$  est assez "petit" ; ainsi,  $\hat{\psi}_5(0) = 9.34 \cdot 10^{-6}$ .

<sup>74</sup> Une fonction  $\psi(t)$  est progressive si sa transformée de Fourier  $\hat{\psi}(\omega)$  est nulle pour  $\omega < 0$ .

<sup>75</sup> Une fonction complexe  $f(t)$  possède la symétrie hermitique si  $f(-t) = \overline{f(t)}$ .

<sup>76</sup>  $\int \omega^N e^{a\omega} d\omega = \left[ \frac{e^{a\omega}}{a^{N+1}} P(\omega) \right]$  où  $P(\omega)$  est un polynôme de degré  $N$  et tel que  $P(0) = (-1)^N N!$

–  $m > 0$  et  $i$  est pair  $i = 2p$  ( $n > 2p + 1$ ), la relation (3.46) devient :

$$C_{2p} = 2 \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5) \cdots 1}{(n-1)(n-3) \cdots (n-2p+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(\theta) d\theta \quad (3.48)$$

Deux nouveaux cas se présentent suivant que  $n$  est pair ou impair :

–  $n = 2s$  on obtient :

$$C_{2p} = \frac{2^{2s-2p} s! (s-p-1)! (2p)!}{p! (2s)!} \quad (3.49)$$

–  $n = 2s + 1$

$$C_{2p} = \frac{(2s-2p-2)! (2p)!}{2^{2s-1} p! (s)!(s-p-1)!} \pi \quad (3.50)$$

#### Dérivation et TOC avec l'ondelette mère de Cauchy

A partir de la note de bas de page (68) et de la relation (3.44), on déduit que<sup>(77)</sup> :

$$\frac{\partial}{\partial a} (T_{\psi_n} [u]) (b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{u}(\omega) \omega \left( \hat{\psi}_{n-1}(a\omega) - \hat{\psi}_n(a\omega) \right) e^{i\omega b} d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial a} (T_{\psi_n} [u]) (b, a) = \frac{1}{a} (n T_{\psi_n} [u] - (n+1) T_{\psi_{n+1}} [u])$$

On déduit de ce qui précède que :

$$T_{\psi_{n+1}} [u] (b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{u}(\omega) \hat{\psi}_{n+1}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{a}{n+1} \int_0^\infty \hat{u}(\omega) \omega \hat{\psi}_n(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

On peut écrire la relation précédente sous la forme :

$$T_{\psi_{n+1}} [u] (b, a) = -i \frac{a}{n+1} \frac{\partial}{\partial b} (T_{\psi_n} [u]) (b, a) = -i \frac{a}{n+1} T_{\psi_n} \left[ \frac{du}{dt} \right] (b, a)$$

#### Relation entre la TOC avec l'ondelette mère de Cauchy et la transformation de Laplace

On examine ensuite comment la TOC avec une ondelette mère de Cauchy peut s'exprimer à l'aide d'une transformée de Laplace. La relation (3.19) devient :  $T_{\psi_n} [u] (b, a) = \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty \omega^n \hat{u}(\omega) e^{i\omega(b+ia)} d\omega$ .

En posant  $p = a - ib$ , la relation précédente peut s'écrire<sup>(78)</sup> à l'aide de la transformée de Laplace unilatérale<sup>(79)</sup> de  $\hat{u}(\omega)$  :

$$T_{\psi_n} [u] (b, a) = \frac{(-a)^n}{n!} \frac{d^n}{dp^n} [T.L. \{ \hat{u}(\omega) \} (p)] \quad (3.51)$$

On regarde maintenant comment la relation (3.51) s'exprime pour deux types de signaux : le signal harmonique  $u(t) = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_1 t}$  et  $u(t) = e^{-\alpha t} \mathcal{Y}(t)$  où  $\alpha$  est un réel positif non nul.

◦ Si  $u(t) = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_1 t}$  alors  $\hat{u}(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$  et

$$T_{\psi_n} [u] (b, a) = \frac{a^n}{n!} (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} [e^{-p\omega_1}] = \frac{a^n}{n!} (\omega_1)^n e^{-p\omega_1} = \frac{1}{n!} (a\omega_1)^n e^{-\omega_1(a-ib)}. \text{ On retrouve que :}$$

$|T_{\psi_n} [u] (b, a)| = \frac{1}{n!} (a\omega_1)^n e^{-\omega_1 a}$  est indépendant de  $b$ . Le module de  $T_{\psi_n} [u] (b, a)$  est maximum lorsque  $a\omega_1 = n$  et vaut  $\frac{1}{n!} (n)^n e^{-n}$ .

◦ Si  $u(t) = e^{-\alpha t} \mathcal{Y}(t)$  alors  $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{i\omega + \alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{1-i(\frac{\omega}{\alpha})}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2}$  ( $\alpha > 0$ ). La transformée de Laplace de  $\frac{1}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2}$  est alors :

$\alpha F(\alpha p)$  où

$$F(p) = \left[ \frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(p) \right] \cos(p) + \mathcal{C}i(p) \sin(p) \quad (80)$$

<sup>77</sup>A partir de :  $\frac{\partial}{\partial a} (T_{\psi} [u]) (b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \omega \hat{u}(\omega) \frac{d\hat{\psi}}{da}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$  et de :

$\frac{d}{da} (\hat{\psi}_n) (a\omega) = \hat{\psi}_{n-1}(a\omega) - \hat{\psi}_n(a\omega)$ , on obtient :

$\frac{\partial}{\partial a} (T_{\psi_n} [u]) (b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{u}(\omega) \omega (\hat{\psi}_{n-1}(a\omega) - \hat{\psi}_n(a\omega)) e^{i\omega b} d\omega$  (on rappelle que la TF des ondelettes mères  $\hat{\psi}_n$  est réelle).

<sup>78</sup> $T_{\psi_n} [u] (b, a) = \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty \omega^n \hat{u}(\omega) e^{-p\omega} d\omega$ . L'intégrale peut être vue comme la transformée de Laplace unilatérale de la fonction :  $\omega^n \hat{u}(\omega)$  et on en déduit que :  $T_{\psi_n} [u] (b, a) = \frac{a^n}{n!} (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} [\int_0^\infty \hat{u}(\omega) e^{-p\omega} d\omega]$ .

<sup>79</sup>la transformée de Laplace unilatérale de  $u(t)$  est  $T.L. \{u(t)\} = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt$ .

<sup>80</sup>La transformée de Laplace de  $\frac{1}{1+\omega^2}$  est :  $F(p) = \left[ \frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(p) \right] \cos(p) + \mathcal{C}i(p) \sin(p)$ .

où le sinus intégral  $\mathcal{S}i(p)$  vaut :  $\int_0^p \frac{\sin(t)}{t} dt$

et le cosinus intégral  $\mathcal{C}i(p)$  vaut :  $\gamma + \text{Log}(p) + \int_0^p \frac{\cos(t)-1}{t} dt$  où  $\gamma$  est la constante d'Euler ( $\gamma = .5772$ ) et  $|\text{Arg}(p)| < \pi$ .



la transformée de Laplace de  $\frac{-i(\frac{\omega}{\alpha})}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2}$  est :  $i\alpha G(\alpha p)$  où

$$G(p) = -\left[\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(p)\right] \sin(p) + \mathcal{C}i(p) \cos(p)^{(81)}.$$

Finalement, la transformée de Laplace de  $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \frac{1-i(\frac{\omega}{\alpha})}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2}$  est :

$$F(\alpha p) + iG(\alpha p) = e^{-i\alpha p} \left[\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(\alpha p) + i\mathcal{C}i(\alpha p)\right].$$

Pour calculer la TOC avec  $\psi_n$ , il suffit de dériver cette expression  $n$  fois.

On commence le calcul pour la dérivée de  $T.L. [\hat{u}(\omega)](p)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \{T.L. [\hat{u}(\omega)](p)\} &= \alpha G(\alpha p) + i\alpha \frac{dG}{dp}(\alpha p)^{(82)} \\ &= \alpha G(\alpha p) - i\alpha F(\alpha p) + \frac{i}{p} \\ &= i \left\{ -\alpha (F(\alpha p) + iG(\alpha p)) + \frac{1}{p} \right\} = i \left\{ -\alpha (T.L. [\hat{u}(\omega)](p)) + \frac{1}{p} \right\}. \end{aligned}$$

On obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dp^n} \{T.L. [\hat{u}(\omega)](p)\} &= (-i\alpha)^n T.L. [\hat{u}(\omega)](p) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n (i)^k \alpha^{(k-1)} \frac{(n-k)!}{p^{n-k+1}} \\ &= (-i\alpha)^n e^{-i\alpha p} \left[\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(\alpha p) + i\mathcal{C}i(\alpha p)\right] + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n (i)^k \alpha^{(k-1)} \frac{(n-k)!}{p^{n-k+1}}. \end{aligned}$$

Finalement, on aboutit à une expression analytique de  $T_{\psi_n}[u](b, a)$  :

$$\begin{aligned} T_{\psi_n}[u](b, a) &= \frac{(a i \alpha)^n}{n!} e^{-i\alpha(a-ib)} \left[\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(\alpha(a-ib)) + i\mathcal{C}i(\alpha(a-ib))\right] \\ &\quad - \frac{(a)^n}{n!} \sum_{k=1}^n (i)^k \alpha^{(k-1)} \frac{(n-k)!}{(a-ib)^{n-k+1}}. \end{aligned}$$

On vérifie que lorsque  $\alpha$  tend vers 0, alors  $T_{\psi_n}[u](b, a)$  tend vers  $-\frac{(a)^n}{n!} i \frac{(n-1)!}{(a-ib)^n} = -\frac{i}{n} \frac{1}{(1-i\frac{b}{a})^n}$  qui est la TOC de la fonction de Heaviside  $\mathcal{Y}(t)$  avec l'ondelette de Cauchy.

### B.3.3 Les ondelettes "exponentielles"

Nous avons pensé à une ondelette mère  $\tilde{\psi}_{\beta\lambda}(t)$  (avec  $0 < \lambda < 1$ ) de la forme

$$\tilde{\psi}_{\beta\lambda}(t) = e^{-\lambda\beta|t|} e^{i\beta t} \quad (3.52)$$

Cette ondelette que nous avons proposée récemment, a une forme similaire à la réponse impulsionnelle d'un oscillateur linéaire avec amortissement visqueux ( $\lambda$  joue le rôle du taux d'amortissement visqueux et  $\beta$  celui de la fréquence propre). La transformée de Fourier de  $\psi_{\beta\lambda}$  est réelle et vaut<sup>(83)</sup> :

$$\hat{\psi}_{\beta\lambda}(\omega) = \frac{2\lambda}{\beta} \frac{1}{\lambda^2 + (\frac{\omega}{\beta} - 1)^2} = \frac{2\lambda\beta}{\lambda^2\beta^2 + (\omega - \beta)^2} \quad (3.53)$$

Elle n'est pas admissible<sup>(84)</sup> au sens strict du terme mais pour  $\beta$  grand ( $\beta \geq 1000$  et  $\lambda = 0.1$ ),  $\hat{\psi}_{\beta\lambda}(0)$  est assez "petit", pour pouvoir être considérée comme numériquement admissible. On a aussi :

$$\frac{d}{d\omega} \left( \ln \hat{\psi}_{\beta\lambda}(\omega) \right) = -\frac{2(\omega - \beta)}{\lambda^2\beta^2 + (\omega - \beta)^2} \quad (3.54)$$

Les coefficients  $C_i$  définis en (3.46) s'écrivent :

$$C_i = 2 \frac{i!}{(\lambda\beta)^{i+1}} \quad (3.55)$$

Le tableau (3.1) donné en fin de chapitre, regroupe pour les trois ondelettes à l'étude, les principaux coefficients et fonctions introduits précédemment<sup>(85)</sup>.

A partir des tableaux précédents, on peut faire les remarques suivantes :

<sup>81</sup>La transformée de Laplace de  $\frac{-\omega}{1+\omega^2}$  est :  $G(p) = \frac{d}{dp} \{F\}(p)$ . On a :  $\frac{d}{dp} \{\mathcal{S}i(p)\} = \frac{\sin(p)}{p}$  et  $\frac{d}{dp} \mathcal{C}i(p) = \frac{\cos(p)}{p}$  D'où :  $G(p) = -\left[\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(p)\right] \sin(p) + \mathcal{C}i(p) \cos(p)$ . Par conséquent, la transformée de Laplace de  $\frac{-i(\frac{\omega}{\alpha})}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2}$  est :  $i\alpha G(\alpha p)$ .

<sup>82</sup> $\frac{d}{dp} \{G\}(p) = -\left[\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}i(p)\right] \cos(p) - \mathcal{C}i(p) \sin(p) - \left(-\frac{\sin(p)}{p}\right) \sin(p) + \left(\frac{\cos(p)}{p}\right) \cos(p)$   
 $= -F(p) + \frac{1}{p}$ .

<sup>83</sup>La T.F. de  $e^{-a|t|}$  vaut  $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

<sup>84</sup> $\hat{\psi}_{\beta\lambda}(0) = \frac{2\lambda}{\beta} \frac{1}{\lambda^2+1} \neq 0$ . Lorsque  $\beta = 1000$  et  $\lambda = 0.1$ , on a :  $\hat{\psi}_{\beta\lambda}(0) = 1.98 \cdot 10^{-4}$

<sup>85</sup> $\|\hat{\psi}\|_2^2$  n'est pas donné dans ce tableau car d'après la formule de Plancherel, on a directement :  $\|\hat{\psi}\|_2^2 = 2\pi \|\psi\|_2^2$ .

- Pour l'ondelette mère de Morlet,  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(\omega)$  sont des densités de probabilité de variables Gaussiennes de moyenne respectivement  $t_\psi$  et  $\omega_\psi$  et d'écart-type  $\Delta t_\psi$  et  $\Delta \omega_\psi$ ; de plus si  $\sigma = 1$ , alors l'écart-type est le même :  $\Delta t_\psi = \Delta \omega_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Les courbes sont symétriques par rapport à leur moyenne respective.
- Pour l'ondelette de Cauchy,  $\varphi_2(\omega)$  n'est autre que la densité de probabilité de la loi Gamma  $\Gamma(2, 2n + 1)$ <sup>(86)</sup> et  $\varphi_1(t)$  dans le cas limite  $n = 0$ , cas où  $\psi_0(t)$  n'est pas une ondelette, est la densité de probabilité de la loi de Cauchy<sup>(87)</sup>.
- Pour l'ondelette exponentielle,  $\varphi_1(t)$  est pour  $t > 0$  au coefficient  $\frac{1}{2}$  près, la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre  $2\lambda\beta$ <sup>(88)</sup>.

## B.4 Réflexions actuelles sur le calcul numérique de la TOC

### B.4.1 Effets de bord

La TOC d'un signal  $u(t)$  défini sur  $\mathbb{R}$  et la TOC du signal  $\tilde{u}(t)$  construit à partir de  $u$  tel que  $\tilde{u}(t) = u(t)$  sur un support borné  $[T_1, T_2]$  et nul ailleurs sont différentes principalement au voisinage des bords ( $b = T_1$  et  $b = T_2$ ). Cette différence provient de la nature même de la TOC définie comme le produit de convolution :  $T_\psi[u](b, a) = \mathcal{P}\psi_a * u(b)$  (cf note de bas de page n°44). C'est le phénomène d'effets de bord. Il est lié à la localisation de la fonction  $\psi_a(t)$  et donc aux propriétés de décroissance de  $\psi_a$ .

On rappelle que le signal étudié  $u(t)$  est réel, causal : ( $u(t) = 0 \quad \forall t < 0$ ) et à énergie finie :  $\int_0^{+\infty} |u(s)|^2 ds \leq M$ .

Notons  $E_{mes} = \int_{T_1}^{T_2} |u(t)|^2 dt$ , l'intégrale de "l'énergie" dans le signal accessible à la mesure, on a donc :

$$\int_0^{T_1} |u(t)|^2 dt < M - E_{mes} \text{ et } \int_{T_2}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \leq M - E_{mes}.$$

Nous allons essayer de majorer la différence entre la TOC de  $u$  et celle de  $\tilde{u}$  :  $T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)$ . Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz<sup>(89)</sup>, on obtient :

$$\begin{aligned} |T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)| &\leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \sqrt{\int_{-\infty}^{T_1} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} |\psi(s)|^2 ds} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\int_{T_2}^{+\infty} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds} \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ou encore si on élève au carré :

$$\begin{aligned} |T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)|^2 &\leq \frac{1}{a} \left\{ \int_{-\infty}^{T_1} |u(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} |\psi(s)|^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_2}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds \right\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Posons  $\tau_1 = \lambda \Delta t_\psi$  où  $\Delta t_\psi$ <sup>(90)</sup> est l'écart-type temporel de l'ondelette introduit dans le paragraphe précédent

<sup>86</sup>La loi Gamma  $\Gamma(b, a)$  ( $a > 0$  et  $b > 0$ ) a pour densité de probabilité :  $\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$ .

<sup>87</sup>La loi de Cauchy est la loi de densité  $\delta(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ . On note qu'une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy n'a pas de valeur moyenne.

<sup>88</sup>La loi exponentielle de paramètre  $\mu$  a pour densité :  $\mu e^{-\mu x} \mathcal{Y}(x)$ .

<sup>89</sup>Posons :  $T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a) = \Gamma_1(b, a, T_1) + \Gamma_2(b, a, T_2)$  avec  $\Gamma_1(b, a, T_1) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{T_1} u(t) \psi_a(t-b) dt$  et  $\Gamma_2(b, a, T_2) = \frac{1}{a} \int_{T_2}^{+\infty} u(t) \psi_a(t-b) dt$ . On a :  $|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)| \leq |\Gamma_1(b, a, T_1)| + |\Gamma_2(b, a, T_2)|$ .

En effectuant ensuite le changement de variable  $s = \frac{t-b}{a}$ , on a :

$\Gamma_1(b, a, T_1) = \int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} u(as+b) \psi(s) ds$  et  $\Gamma_2(b, a, T_2) = \int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} u(as+b) \psi(s) ds$ . On peut ensuite majorer chacun des deux termes  $|\Gamma_1(b, a, T_1)|$  et  $|\Gamma_2(b, a, T_2)|$  à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient :  $|\Gamma_1(b, a, T_1)| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} |u(as+b)|^2 ds} \sqrt{\int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} |\psi(s)|^2 ds}$  et  $|\Gamma_2(b, a)| \leq \sqrt{\int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |u(as+b)|^2 ds} \sqrt{\int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds}$ . Finalement, on trouve que :

$|\Gamma_1(b, a, T_1)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{-\infty}^{T_1} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} |\psi(s)|^2 ds}$  et

$|\Gamma_2(b, a)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{T_2}^{+\infty} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds}$ .

<sup>90</sup> $\Delta t_\psi = \frac{1}{\|\psi\|_2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t_\psi)^2 |\psi(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t_\psi)^2 \varphi_1(t) dt}$  où  $t_\psi$  est un temps moyen défini par :

$t_\psi = \int_{\mathbb{R}} t \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt = \int_{\mathbb{R}} t \varphi_1(t) dt$  à l'aide de la fonction  $\varphi_1(t) = \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2}$ .

et qui, dans une approche par calcul de probabilité, peut être vue comme une fonction de densité de probabilité. On peut alors grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, écrire que si  $I$  est l'intervalle défini par :  $|t - t_\psi| \geq \tau_1$  on a alors<sup>(91)</sup> :

$$\int_I |\psi(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\lambda^2} \|\psi\|_2^2 \quad (3.58)$$

Dans le plan temps-échelle, on peut ensuite définir un domaine<sup>(92)</sup> qui détermine un triangle de sommets les 3 points suivants :  $A(T_1, 0)$  ,  $B(T_2, 0)$  et  $C(\frac{T_1+T_2}{2}, \frac{T_2-T_1}{2\tau_1})$  dont les points  $(b, a)$  intérieurs vérifient :

$$T_1 + a\tau_1 \leq b \leq T_2 - a\tau_1 \quad (3.59)$$

A l'intérieur du triangle  $\widehat{ABC}$ , nous pouvons écrire grâce à ce qui précède<sup>(93)</sup> que :

$$|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{M - E_{mes}} \frac{1}{\lambda} \|\psi\|_2 \quad (3.60)$$

Lorsque  $T_1 = 0$  et lorsque  $|\psi|$  est paire, on peut trouver<sup>(94)</sup> un majorant un peu plus "petit" :

$$|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)| \leq \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{M - E_{mes}} \frac{1}{\lambda} \|\psi\|_2 \quad (3.61)$$

On s'intéresse maintenant au plan temps-fréquence  $(t, f)$  en notant  $f$  la fréquence. Par suite on pose :  $a = \frac{\omega^{(1)}}{2\pi f}$  où  $\omega^{(1)}$  est la pulsation pour laquelle  $\hat{\psi}(\omega)$  est maximum. L'inégalité donnée en relation (3.59) devient :

$$T_1 + \frac{\omega^{(1)}}{2\pi f} \tau_1 \leq b \leq T_2 - \frac{\omega^{(1)}}{2\pi f} \tau_1 \quad (3.62)$$

ou encore :

$$f T_1 + \frac{\omega^{(1)}}{2\pi} \tau_1 \leq f b \leq f T_2 - \frac{\omega^{(1)}}{2\pi} \tau_1 \quad (3.63)$$

Dans l'article [ARTI13] soumis récemment au Journal Sound and Vibration, l'inégalité (3.62) est modifiée pour faire intervenir le paramètre  $Q$  défini en relation (3.32)<sup>(95)</sup>. On obtient :

$$T_1 + \frac{\omega^{(1)}}{2\pi f} 2\lambda Q \frac{\mu(\psi)}{\omega_\psi} \leq b \leq T_2 - \frac{\omega^{(1)}}{2\pi f} 2\lambda Q \frac{\mu(\psi)}{\omega_\psi} \quad (3.64)$$

Dans l'article pré-cité, on fait la simplification que  $T_1 = 0$  et on assimile  $\omega^{(1)}$  à  $\omega_\psi$  , la relation précédente devient :

<sup>91</sup>La probabilité pour que  $t \in \Omega$  est définie par :  $P(t \in \Omega) = \int_\Omega \varphi_1(t) dt$  . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires de variance finie énonce que :  $P(|t - t_\psi| \geq \lambda \Delta t_\psi) \leq \frac{1}{\lambda^2}$ . On note que cette majoration est assez forte car pour  $\lambda = 1$  , elle donne une évidence !

On déduit que dans l'ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  défini par :  $|t - t_\psi| \geq \tau_1$ , en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $\varphi_1(t) = \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2}$ , on obtient :  $\int_I \varphi_1(t) dt \leq \frac{1}{\lambda^2}$ . Et finalement :  $\int_I |\psi(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\lambda^2} \|\psi\|_2^2$ .

<sup>92</sup>Ce domaine est tel que :  $\frac{T_1-b}{a} \leq -\tau_1$  et  $\frac{T_2-b}{a} \geq \tau_1$  ; c'est-à-dire :  $T_1 + a\tau_1 \leq b \leq T_2 - a\tau_1$ .

<sup>93</sup>On a vu précédemment que :  $|\Gamma_1(b, a, T_1)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{-\infty}^{T_1} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\frac{a}{\tau_1}}^{\frac{T_1-b}{a}} |\psi(s)|^2 ds}$  et  $|\Gamma_2(b, a)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{T_2}^{+\infty} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds}$ . On a donc :  $\Gamma_1(b, a, T_1 = 0) = 0$  ou  $|\Gamma_1(b, a, T_1 \neq 0)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_0^{T_1} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} |\psi(s)|^2 ds}$  et  $|\Gamma_2(b, a)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{T_2}^{+\infty} |u(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds}$ . A l'intérieur du triangle défini par :  $\frac{T_1-b}{a} \leq -\tau_1$  et  $\frac{T_2-b}{a} \geq \tau_1$ , on a donc :  $\int_{-\infty}^{\frac{T_1-b}{a}} |\psi(s)|^2 ds < \int_{-\infty}^{-\tau_1} |\psi(s)|^2 ds$  et  $\int_{\frac{T_2-b}{a}}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds < \int_{\tau_1}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds$ . La relation (3.57) s'écrit alors :  $|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)|^2 \leq \frac{1}{a} (M - E_{mes}) \left\{ \int_{-\infty}^{-\tau_1} |\psi(s)|^2 ds + \int_{\tau_1}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds \right\}$ . En supposant  $t_\psi = 0$  et en posant  $I$  l'ensemble tel que  $|t| \geq \tau_1$ , la relation (3.58) permet d'écrire que :  $\left( \int_{-\infty}^{-\tau_1} |\psi(s)|^2 ds + \int_{\tau_1}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds \right) = \int_I |\psi(s)|^2 ds$  est majorée par  $\frac{1}{\lambda^2} \|\psi\|_2^2$ . Finalement, on obtient :  $|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)|^2 \leq \frac{1}{a} (M - E_{mes}) \frac{1}{\lambda^2} \|\psi\|_2^2$  ou encore :  $|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{M - E_{mes}} \frac{1}{\lambda} \|\psi\|_2$ .

<sup>94</sup>Si  $T_1 = 0$  alors  $\Gamma_1(b, a, T_1 = 0) = 0$ . Si  $|\psi|$  est paire, alors  $\int_{\tau_1}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds = \int_{-\infty}^{-\tau_1} |\psi(s)|^2 ds = \frac{1}{2} \int_I |\psi(s)|^2 ds$  qui peut être majoré par :  $\frac{1}{2\lambda^2} \|\psi\|_2^2$ . On obtient donc :  $|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)|^2 \leq \frac{1}{a} (M - E_{mes}) \frac{1}{2\lambda^2} \|\psi\|_2^2$  ou encore  $|T_\psi[u](b, a) - T_\psi[\tilde{u}](b, a)| \leq \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{M - E_{mes}} \frac{1}{\lambda} \|\psi\|_2$ .

<sup>95</sup>On utilise :  $\tau_1 = \lambda \Delta t_\psi = 2\lambda Q \frac{\mu(\psi)}{\omega_\psi}$

$$\frac{1}{2\pi f} 2\lambda Q\mu(\psi) \leq b \leq T_2 - \frac{1}{2\pi f} 2\lambda Q\mu(\psi) \quad (3.65)$$

Le domaine défini en (3.63) est compris entre deux hyperboles dont les asymptotes sont l'axe horizontal ( $f = 0$ ) et respectivement les axes verticaux ( $b = T_1$  et  $b = T_2$ ). Posons  $\Delta T = T_2 - T_1$  qui représente la longueur du signal mesuré. Le point d'intersection  $J$  des deux hyperboles est le point de coordonnées  $(\frac{T_1+T_2}{2}, \frac{\omega^{(1)}}{\pi} \frac{T_1}{\Delta T})$ . Pour qu'une fréquence  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$  contenue dans le signal étudié se retrouve visible dans le domaine précédemment défini du plan temps-fréquence<sup>(96)</sup> ait une arête contenue dans le domaine, il faut que<sup>(97)</sup> :

$$\lambda\omega^{(1)}\Delta t_\psi < \frac{\omega_1}{2}\Delta T \quad (3.66)$$

Dans l'inégalité précédente, on note que  $\omega^{(1)}$  et  $\Delta t_\psi$  dépendent uniquement de l'ondelette mère alors que  $\omega_1$  et  $\Delta T$  dépendent uniquement du signal étudié.

Pour l'ondelette de Cauchy  $\psi_n(t)$ , dont  $|\psi_n(t)|$  est une fonction paire<sup>(98)</sup>, en supposant  $T_1 = 0$  et en posant  $a = \frac{\omega^{(1)}}{2\pi f}$ , la relation (3.61) s'écrit :

$$\left| T_{\psi_n}[u]\left(b, \frac{n}{2\pi f}\right) - T_{\psi_n}[\tilde{u}]\left(b, \frac{n}{2\pi f}\right) \right| \leq \sqrt{M - E_{mes}} \frac{\pi}{\lambda} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n! \sqrt{n}} \sqrt{f} \quad (3.67)$$

Posons  $h = \frac{\omega_1}{2\lambda}\Delta T$ , la relation (3.66) devient :

$$n\sqrt{\frac{1}{2n-1}} < h \quad (3.68)$$

L'inégalité dans la relation (3.68) a un sens si  $h \geq 1$  et on obtient<sup>(99)</sup> que  $n \in [\alpha_1, \alpha_2]$  avec  $\alpha_{1,2} = h^2 \mp h\sqrt{h^2 - 1}$ . On note que si  $h = 1$  alors  $n = 1$  et que si  $h \gg 1$  alors  $n \in ]0, 2h^2[$ .

#### B.4.2 Calcul numérique de la TOC

La relation (3.19) introduite précédemment, nous a servi pour le calcul numérique de la TOC à l'aide des algorithmes de transformées de Fourier rapides (FFT). Le pas d'échantillonnage fréquentiel est égal à  $\Delta\omega_{FFT} = \frac{2\pi}{\Delta T}$ . Il est immédiat que la résolution fréquentielle locale de la TOC que nous avons notée  $\Delta\omega$  et qui est définie en relation (3.30) ne peut pas être inférieure à  $\Delta\omega_{FFT}$ . Pour la fréquence  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$  qui nous intéresse, on choisit  $\Delta\omega$  pour qu'elle soit supérieure à 2 fois  $\Delta\omega_{FFT}$  :

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\omega_\psi \omega_1}{\omega^{(1)}} \geq \frac{4\pi}{\Delta T} \quad (3.69)$$

Pour l'ondelette de Cauchy, la relation précédente (3.69) entraîne que<sup>(100)</sup> :

$$\omega_1 \geq \omega_{lim} = \frac{2n}{\sqrt{2n+1}} \frac{4\pi}{\Delta T} \quad (3.70)$$

ce qui dans le plan temps-fréquence correspond à la partie du quart de plan supérieure à la droite horizontale d'équation  $\omega = \omega_{lim}$ . En introduisant  $h = \frac{\omega_1}{2\lambda}\Delta T$ , on trouve que<sup>(101)</sup> :

$$n < \alpha_3 = \frac{1}{16\pi^2} \left( \lambda^2 h^2 + \lambda h \sqrt{\lambda^2 h^2 + 16\pi^2} \right) \quad (3.71)$$

<sup>96</sup>Il faut que la droite d'équation  $f = f_1$  soit située au dessus du point  $J$  ; c'est-à-dire que :  $f_1 > \frac{\omega^{(1)}}{\pi} \frac{\lambda\Delta t_\psi}{\Delta T}$ . En posant  $\omega_1 = 2\pi f_1$ , on arrive à :  $\lambda\omega^{(1)}\Delta t_\psi < \frac{\omega_1}{2}\Delta T$ .

<sup>97</sup>Il faut que la droite d'équation  $f = f_1$  soit située au dessus du point  $J$  ; c'est-à-dire que :  $f_1 > \frac{\omega^{(1)}}{\pi} \frac{\lambda\Delta t_\psi}{\Delta T}$ . En posant  $\omega_1 = 2\pi f_1$ , on arrive à :  $\lambda\omega^{(1)}\Delta t_\psi < \frac{\omega_1}{2}\Delta T$ .

<sup>98</sup>Pour l'ondelette de Cauchy, on a :  $t_\psi = 0$ ,  $\Delta t_\psi = \sqrt{\frac{1}{2n-1}}$  et  $\|\psi_n\|_{L^2}^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi$  d'où  $\|\psi_n\|_{L^2} = \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} \sqrt{\pi}$  et  $\omega^{(1)} = n$ . Par conséquent,  $\tau_1 = \lambda \sqrt{\frac{1}{2n-1}}$  et le point  $J$  a pour coordonnées :  $(\frac{T_1+T_2}{2}, \frac{\lambda}{\pi\Delta T} n \sqrt{\frac{1}{2n-1}})$ .

<sup>99</sup>La relation (3.68) s'écrit :  $n^2 \leq h^2(2n-1)$  ou encore :  $n^2 - 2h^2n + h^2 \leq 0$  ; le discriminant réduit vaut :  $\Delta = h^4 - h^2 = h^2(h^2 - 1)$ . Si  $h \geq 1$ , alors deux racines réelles  $\alpha_{1,2} = h^2 \mp h\sqrt{h^2 - 1}$  et on doit avoir  $n \in [\alpha_1, \alpha_2]$ .

<sup>100</sup>On a :  $\Delta\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{2n+1}}{2n} \geq \frac{4\pi}{\Delta T}$ , soit  $\omega_1 \geq \omega_{lim} = \frac{2n}{\sqrt{2n+1}} \frac{4\pi}{\Delta T}$ .

<sup>101</sup>L'inégalité précédente (3.70) entraîne  $\lambda h \sqrt{2n+1} \geq 4\pi n$  et finalement la résolution de  $\frac{16\pi^2}{\lambda^2 h^2} n^2 - 2n - 1 \leq 0$  conduit à :  $n < \alpha_3 = \frac{1}{16\pi^2} \left( \lambda^2 h^2 + \lambda h \sqrt{\lambda^2 h^2 + 16\pi^2} \right)$ .

## C Transformée en ondelette continue de réponses libres de structures en vibration

Ce paragraphe traite des propriétés de la TOC de réponses libres de structures mécaniques.

Ce paragraphe est divisé en deux sections : la première section traite de la TOC d'un signal asymptotique et la dernière section étudie la TOC des réponses libres de systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté.

Sous certaines conditions de localisation de l'ondelette mère et d'asymptoticité du signal étudié, la transformée en ondelettes continue de tels signaux se concentre autour de courbes dans le plan temps-échelle appelés "arêtes" et par exemple, la connaissance du module de la TOC sur ces arêtes permet de remonter à un facteur près aux différentes composantes de la somme dans la relation (3.1).

### C.1 Transformée en ondelette continue d'un signal asymptotique

Dans cette section, l'ondelette mère est une ondelette progressive (c'est-à-dire à TF nulle sur  $\mathbb{R}^*$ ). La TOC d'un signal asymptotique se localise dans le demi-plan temps fréquence, autour d'une courbe  $(b, ar(b))$  appelée "arête", où la TOC sur l'arête appelée "squelette" se comporte comme le signal analytique associé. Carmona et al. (cf. note de bas de page n°28) proposent plusieurs moyens pour traquer les arêtes. Deux groupes de méthodes : *les méthodes différentielles* et *les méthodes intégrales*. Les premières sont fondées sur une analyse locale de la TOC et on distingue deux sous-familles : les méthodes utilisant les points  $(b, ar(b))$  extréma du module de la TOC et celle utilisant les points  $(b, ar(b))$  où la fréquence instantanée de la TOC coïncide avec celle de l'ondelette dilatée. Les méthodes intégrales quant à elles sont fondées sur des techniques d'optimisation en supposant que l'arête est un ensemble de points constituant une courbe "lisse". Ces dernières sont actuellement à l'étude au LAMI et ne seront pas exposées dans ce chapitre.

Les méthodes différentielles sont locales et ne nécessitent aucune discrétisation a priori de la TOC. Elles ont donc l'avantage de demander le calcul de la TOC seulement en quelques points représentatifs du plan temps-fréquence. Pour un signal asymptotique  $u(t) = A(t) \cos(\varphi(t))$ , dans les méthodes différentielles, les courbes arêtes sont définies par :

$$ar(b) = \frac{Cte}{\dot{\varphi}(b)} \quad (3.72)$$

où la constante est homogène à une pulsation et est égale soit à la pulsation  $\omega^{(1)}$  qui maximise le module de l'ondelette mère pour la technique basée sur le module de la TOC, soit à  $\omega^{(2)}$  qui est la dérivée de la phase de l'ondelette mère en zéro pour la technique basée sur la phase de la TOC. On note que les valeurs de pulsations caractéristiques  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$  et  $\omega_\psi$  sont identiques pour les ondelettes de Morlet et pour les ondelettes exponentielles :  $\omega^{(1)} = \omega_\psi = \omega^{(2)}$  et valent le paramètre appelé  $\beta$ . Pour les ondelettes de Cauchy, on a :  $\omega^{(1)} = n < \omega_\psi = n + \frac{1}{2} < \omega^{(2)} = n + 1$  ; lorsque  $n$  est grand, ces valeurs sont proches.

On montre aussi que

$$T_\psi[u](b, a) \approx \frac{1}{2} \widehat{\psi}(a \dot{\varphi}(b)) u_a(b) \quad (3.73)$$

Pour un signal  $u(t)$  du type ligne spectrale dont la notion a été introduite en page (67) :  $u(t) = A(t) \cos(\omega_1 t)$ , on donne à partir de la relation (3.31) pour chacune des trois ondelettes mentionnées, le domaine de localisation temps-fréquence le long d'une arête définie par :  $ar(b) = \frac{\omega^{(1)}}{\omega_1}$ . Ce domaine est exprimé premièrement en fonction des paramètres qui caractérisent l'ondelette, et ensuite en fonction du facteur  $Q$ .

*Pour l'ondelette de Morlet*

$$\left[ b_j - \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2} \omega_1}, b_j + \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2} \omega_1} \right] \times \left[ \omega_1 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2 \beta \sigma} \right), \omega_1 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2 \beta \sigma} \right) \right] \quad (3.74)$$

ou encore ( $Q = \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2}}$ )

$$\left[ b_j - \frac{Q}{\omega_1}, b_j + \frac{Q}{\omega_1} \right] \times \left[ \omega_1 \left( 1 - \frac{1}{2Q} \right), \omega_1 \left( 1 + \frac{1}{2Q} \right) \right] \quad (3.75)$$

*Pour l'ondelette de Cauchy*

$$\left[ b_j - \frac{n}{\omega_1 \sqrt{2n-1}}, b_j + \frac{n}{\omega_1 \sqrt{2n-1}} \right] \quad (3.76)$$

$$\times \left[ \omega_1 \left( 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right), \omega_1 \left( 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) \right] \quad (3.77)$$

ou encore ( $Q = \frac{1}{2}\sqrt{2n+1}$ )

$$\begin{aligned} & \left[ b_j - \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{(4Q^2-1)^2}}} \frac{Q}{\omega_1}, b_j + \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{(4Q^2-1)^2}}} \frac{Q}{\omega_1} \right] \\ & \times \left[ \omega_1 \left( 1 + \frac{1}{4Q^2-1} - \frac{1}{2Q} \right), \omega_1 \left( 1 + \frac{1}{4Q^2-1} + \frac{1}{2Q} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

Pour l'ondelette exponentielle

$$\left[ b_j - \frac{\sqrt{2}}{\omega_1 2\lambda}, b_j + \frac{\sqrt{2}}{\omega_1 2\lambda} \right] \times [\omega_1 (1 - \lambda), \omega_1 (1 + \lambda)] \quad (3.79)$$

ou encore ( $Q = \frac{1}{2\lambda}$ )

$$\left[ b_j - \frac{\sqrt{2}Q}{\omega_1}, b_j + \frac{\sqrt{2}Q}{\omega_1} \right] \times \left[ \omega_1 \left( 1 - \frac{1}{2Q} \right), \omega_1 \left( 1 + \frac{1}{2Q} \right) \right] \quad (3.80)$$

Torrésani <sup>(102)</sup> écrit l'approximation précédente sous la forme :

$$T_\psi[u](b, a) = \widehat{\psi}(a\omega_1) \left\{ \frac{1}{2} A(b) e^{i\omega_1 b} + r(b, a) \right\} \quad (3.81)$$

et donne deux majorations possibles du reste  $r(b, a)$  de la relation précédente :

- dans le cas où  $A(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et lorsque le moment d'ordre 1 de l'ondelette mère :  $C_1^{(103)}$  est borné, on pose  $r(b, a) = r_1(b, a)$  et on a alors :

$$|r_1(b, a)| \leq \frac{C_1}{2} \frac{a}{|\widehat{\psi}(a\omega_1)|} \sup_t |A'(t)| \quad (3.82)$$

On pose  $D_1(a, \omega_1) = \frac{C_1}{2} \frac{a}{|\widehat{\psi}(a\omega_1)|}$  qui est fonction de  $a$  et de la pulsation  $\omega_1$  du signal.

- dans le cas où  $A(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et lorsque le moment d'ordre 2 de l'ondelette mère :  $C_2^{(104)}$  est borné, on pose  $r(b, a) = r_{21}(b, a) + r_{22}(b, a)$  où  
 $r_{21}(b, a) = -i \frac{a}{2} A'(b) e^{i\omega_1 b} \frac{\widehat{\psi}'(a\omega_1)}{\widehat{\psi}(a\omega_1)}$  et on a alors

$$|r_{22}(b, a)| \leq \frac{C_2}{4} \frac{a^2}{|\widehat{\psi}(a\omega_1)|} \sup_t |A''(t)| \quad (3.83)$$

La relation précédente montre que lorsque  $a$  est égal à  $ar$  avec la constante dans la relation (3.72) qui est égale à  $\omega^{(1)}$ , alors  $\widehat{\psi}'(ar \cdot \omega_1) = 0$  et  $r_{21}(b, a)$  est nul, le terme d'erreur devient du second ordre en  $a$  et dans les dérivées secondes de l'amplitude. On pose  $D_2(a, \omega_1) = \frac{C_2}{4} \frac{a^2}{|\widehat{\psi}(a\omega_1)|}$  qui est fonction de  $a$  et de la pulsation  $\omega_1$  du signal.

Pour l'ondelette de Morlet,  $D_1(a, \omega_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} a e^{\frac{(a\omega_1 - \beta)^2 \sigma^2}{2}}$ . En posant  $a = \frac{\omega^{(1)}}{\omega} = \frac{\beta}{\omega}$ , on peut écrire :  $D_1(\omega, \omega_0) = \frac{Q}{\sqrt{\pi}\omega} e^{Q^2 \frac{(\frac{\omega_1}{\omega} - 1)^2}{2}}$ . Pour  $\omega = \omega_1$ , on est sur l'arête et  $D_1(\omega_1) = \frac{Q}{\sqrt{\pi}\omega_1}$ . De plus,  $D_2(a, \omega_1) = \frac{\sigma^2 a^2}{4} e^{\frac{(a\omega_1 - \beta)^2 \sigma^2}{2}}$ . Comme précédemment en posant  $a = \frac{\beta}{\omega}$ , on obtient :  $D_2(\omega, \omega_1) = \frac{Q^2}{2\omega^2} e^{Q^2 \frac{(\frac{\omega_1}{\omega} - 1)^2}{2}}$  et finalement sur l'arête :  $D_2(\omega_1) = \frac{Q^2}{2\omega_1^2}$ .

Pour l'ondelette de Cauchy, on trouve que  $D_1(a, \omega_1) = \frac{1}{2\pi\omega_1} \frac{n(n-2)!}{(a\omega_1)^{(n-1)}} e^{a\omega_1}$ . En posant  $a = \frac{\omega^{(1)}}{\omega} = \frac{n}{\omega}$ , on peut écrire que :  $D_1(\omega, \omega_1) = \frac{1}{2\pi\omega_1} \frac{(n-2)!}{n^{(n-2)}} \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^{(n-1)} e^{n \frac{\omega_1}{\omega}}$ . Sur l'arête, on a :  $\omega = \omega_1$  et  $D_1(\omega_1) = \frac{1}{2\pi\omega_1} \frac{(n-2)!}{n^{(n-2)}} e^n$ . On montre que  $D_1(\omega_1)$  tend par valeurs supérieures<sup>(105)</sup> à  $\frac{Q}{\sqrt{\pi}\omega_1}$  où  $Q = \frac{1}{2}\sqrt{2n+1}$  comme pour l'ondelette de Morlet.

<sup>102</sup>cf. livre de Bruno Torrèsani cité en référence n°(63) pages 85-87 .

<sup>103</sup>On rappelle que  $C_1 = \int_{\mathbb{R}} |t| |\psi(t)| dt$ .

<sup>104</sup>On rappelle que  $C_2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 |\psi(t)| dt$ .

<sup>105</sup>Le rapport  $\frac{D_1(\omega_0)\sqrt{\pi}\omega_0}{Q}$  vaut respectivement 1.0934, 1.0084 et 1.0042 pour  $n = 10$ ,  $n = 100$  et  $n = 200$ .

Pour l'ondelette exponentielle, on trouve que  $D_1(a, \omega_1) = \frac{a}{2\lambda\beta} \left( 1 + \left( \frac{a\omega_1 - \beta}{\lambda\beta} \right)^2 \right)$ . En posant  $a = \frac{\omega^{(1)}}{\omega} = \frac{\beta}{\omega}$ , on peut écrire :  $D_1(\omega, \omega_1) = \frac{1}{2\lambda\omega} \left( 1 + \left( \frac{\omega_1 - 1}{\lambda} \right)^2 \right)$ . Sur l'arête, on a :  $\omega = \omega_0$  et  $D_1(\omega_1) = \frac{1}{2\lambda\omega_1} = \frac{Q}{\omega_0}$ . On a aussi  $D_2(a, \omega_1) = \frac{a^2}{2(\lambda\beta)^2} \left( 1 + \left( \frac{a\omega_1 - \beta}{\lambda\beta} \right)^2 \right)$  et ensuite, en posant  $a = \frac{\beta}{\omega}$ , on obtient :  $D_2(\omega, \omega_1) = \frac{2Q^2}{\omega^2} \left( 1 + \left( \frac{\omega_1 - 1}{\lambda} \right)^2 \right)$  et finalement  $D_2(\omega_0) = \frac{2Q^2}{\omega_1^2}$ .

On peut noter que pour chacune des ondelettes retenues que lorsque  $\frac{Q}{\omega_1}$  est "faible", alors sur l'arête, les majorants donnés par les relations précédentes sont "faibles" et les restes sont alors "petits".

## C.2 Transformée en ondelettes continue des vibrations libres d'un système linéaire

On s'intéresse maintenant à la TOC de la réponse libre en termes de déplacement pour un système dynamique linéaire à  $N$  degrés de liberté. On a vu en relation (3.12) que les composantes  $u_j(t)$  du vecteur déplacement  $\underline{u}(t)$ ;  $u_j(t)$  désignant la réponse en un point  $j$  du système, peuvent se mettre sous la forme :

$$u_j(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_{jr} U_r(t)$$

où  $U_r(t)$  est la réponse du mode  $r$  qui a été définie en relation (3.13)<sup>(106)</sup>. Comme la transformée en ondelettes continue est une transformation linéaire, la TOC de chaque composante  $u_j(t)$  peut s'écrire :

$$T_\psi[u_j](b, a) = \sum_{r=1}^N \Phi_{jr} T_\psi[U_r](b, a) \quad (3.84)$$

On a aussi vu que  $U_r(t)$  s'exprime sous la forme d'une ligne spectrale donnée en relation (3.14) :  $U_r(t) = B_r e^{-\tau_r \omega_r t} \mathcal{Y}(t) \cos(\tilde{\omega}_r t - \psi_r)$ . La relation précédente (3.84) ainsi que la relation (3.73) nous conduisent à l'expression approchée pour la TOC de  $u_j(t)$  :

$$T_\psi[u_j](b, a) \approx \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \Phi_{jr} \widehat{\psi}(a\tilde{\omega}_r) U_{r_a}(b) \quad (3.85)$$

De plus, pour une composante  $U_{r_a}(b)$ , la borne supérieure de  $|A'_r(t)|$  vaut  $\tau_r \omega_r B_r$  et la relation donnant une majoration du reste  $r_1$  devient

$$|r_1(b, a)| \leq D_1(a, \tilde{\omega}_r) \tau_r \omega_r B_r \quad (3.86)$$

Si les valeurs numériques des fréquences  $\tilde{\omega}_r$  sont suffisamment éloignées les unes des autres, la présence du facteur  $\widehat{\psi}(a\tilde{\omega}_r)$  dans la relation (3.85) entraîne que la contribution de la  $r$ ème composante à  $T_\psi[u](b, a)$  est localisée au voisinage de  $a = a_r(b) = \frac{Cte}{\tilde{\omega}_r}$ . Cette dernière relation fournit une première estimation des  $\tilde{\omega}_r$ . L'article [ARTI13] soumis récemment au Journal Sound and Vibration étudie de façon précise l'utilisation de la transformée en ondelettes pour l'identification modale à partir de réponses libres. L'effet de bord mentionné précédemment et le choix de la localisation temps-fréquence est développée et des solutions sont apportées pour améliorer le calcul numérique de la TOC et l'identification des paramètres modaux qui en découlent. L'approche est fondée sur le paramètre  $Q$  introduit précédemment en relation (3.32).

### C.2.1 Densité spectrale d'énergie

On note  $\hat{\underline{u}}(\omega)$  le vecteur formé par la transformée de Fourier de chacune des composantes de  $\underline{u}(t)$ . Il se déduit de la relation (3.11) par :

$$\hat{\underline{u}}(\omega) = \underline{\Phi} \hat{\underline{U}}(\omega) = \sum_{r=1}^N \hat{U}_r(\omega) \underline{\phi}_r \quad (3.87)$$

La transformée de Fourier de la réponse modale transitoire vaut <sup>(107)</sup> :

$$\hat{U}_r(\omega) = \frac{\dot{U}_r(0) + U_r(0)(i\omega + 2\tau_r \omega_r)}{-\omega^2 + \omega_r^2 + 2i\tau_r \omega_r \omega} \quad (3.88)$$

<sup>106</sup>  $U_r(t) = e^{-\tau_r \omega_r t} \left[ \frac{\dot{U}_r(0) + \tau_r \omega_r U_r(0)}{\tilde{\omega}_r} \sin \tilde{\omega}_r t + U_r(0) \cos \tilde{\omega}_r t \right] \mathcal{Y}(t)$

<sup>107</sup> La transformée de Fourier de  $e^{-at} \sin(\omega_0 t) \mathcal{Y}(t)$  pour  $a > 0$  vaut :  $\frac{\omega_0}{(i\omega + a)^2 + \omega_0^2}$  et la transformée de Fourier de  $e^{-at} \cos(\omega_0 t) \mathcal{Y}(t)$  vaut :  $\frac{i\omega + a}{(i\omega + a)^2 + \omega_0^2}$ .



La densité spectrale d'énergie de  $U_r(t)$  vaut :

$$E_{U_r}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\left(\dot{U}_r(0) + 2\tau_r\omega_r U_r(0)\right)^2 + \omega^2 U_r(0)^2}{(-\omega^2 + \omega_r^2)^2 + 4\tau_r^2\omega^2} \quad (3.89)$$

La densité spectrale de  $U_r(t)$  est une fraction rationnelle ; son comportement pour  $\omega \rightarrow \infty$  est en  $\omega^{-2}$  ( $\alpha = 2$ ) si  $U_r(0) \neq 0$  et en  $\omega^{-4}$  si  $U_r(0) = 0$  ( $\alpha = 4$ ). Considérons la densité spectrale de chacune des composantes de  $u_j(t)$ , on montre aisément que :

$$E_{u_j}(\omega) \leq \sum_{r=1}^N \Phi_{jr}^2 E_{U_r}(\omega) \quad (3.90)$$

Considérons une ondelette mère tels que ses  $p$  premiers moments soient nuls (cf. relation (3.24)). Le paragraphe sur le comportement à l'infini de  $\tilde{E}_{T_\psi[u]}(b, \omega)$  qui se trouve en page 74, nous permet de conclure que : pour que le spectre moyen de la transformée en ondelettes se comporte comme celui du spectre de fréquence, il faut que : si  $U_r(0) \neq 0$  alors  $p \geq 1$  ou si  $U_r(0) = 0$  alors  $p \geq 2$ . On note que l'ondelette de Morlet ne convient pas pour vérifier cette condition.

## D Fonctions caractéristiques de l'objet

### D.1 Réponse impulsionnelle - Force interne

#### D.1.1 Réponse impulsionnelle

Pour une structure excitée en  $N_e$  composantes et dont on mesure  $N_m$  réponses à ces excitations, on définit une matrice de réponses impulsionnelles ou percussionnelles  $\underline{\underline{h}} : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{N_m} \times \mathbb{R}^{N_e}$  dont les colonnes sont formées des réponses impulsionnelles ou percussionnelles engendrées par des impulsions de Dirac appliquées aux différentes composantes de l'entrée qui est notée  $F(t)$ .

Pour un filtre linéaire à temps continu et causal, la relation de convolution entre l'entrée et la sortie du filtre s'écrit sous forme matricielle à l'aide de la matrice  $\underline{\underline{h}}$  :

$$\underline{\underline{u}}_{mes} = \int_0^t \underline{\underline{h}}(t - \tau) \underline{\underline{F}}(\tau) d\tau \quad (3.91)$$

Remontons au début du XXème siècle, au temps des locomotives à vapeur. A cette époque, les techniques de fonte des roues de chemin de fer ne permettent pas d'assurer un niveau de fiabilité suffisant et certaines roues vieillissaient prématurément, faisant courir le risque d'un déraillement à l'ensemble du convoi. Durant les arrêts en gare, un préposé des chemins de fer vient impacter les roues d'un coup de masse et juge à l'oreille de la fiabilité des roues. C'est, sans doute, l'un des tout premiers tests impulsionnels, réalisés au marteau. L'oreille du préposé sert de microphone et toute déviation à une sonorité de référence indique la présence d'une fissure dangereuse pour le train.

Voilà un exemple très simple qui met en valeur les bases du test impulsionnel dans le cas des structures. Depuis, les techniques ont évolué et les informations obtenues par l'intermédiaire de ce type de test sont plus raffinées. Elles sont couramment employées aujourd'hui pour des structures légères où la connexion d'un excitateur perturbe de façon importante la réponse dynamique du fait des raideur et masse ajoutées en un point particulier de la structure. Les difficultés de la technique résident principalement dans la réalisation d'une impulsion<sup>(108)</sup> se rapprochant au mieux d'un dirac afin d'obtenir la réponse impulsionnelle du système. D'un point de vue technologique, pour éviter les problèmes de rebond du marteau sur la structure, des impacteurs électromécaniques ont été développés.

A partir de la réponse impulsionnelle, plusieurs techniques de caractérisation peuvent être envisagées. Un premier groupe de techniques réalise un lissage de ces fonctions à l'aide d'un modèle temporel (par exemple décomposition

<sup>108</sup>Gibert(cf. pp. 55 de la référence citée ci-après) propose de définir physiquement une distribution de Dirac en un point  $P_j$  de la structure comme la limite d'une suite de fonctions  $\gamma_{\Delta\rho}(P)$  définies en tout point  $P$  de la structure par :

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta\rho}(P) &= 0 \quad \text{si } d(P, P_j) \geq \Delta\rho \\ \gamma_{\Delta\rho}(P) &= \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\Delta\rho^3} \quad \text{si } d(P, P_j) < \Delta\rho \end{aligned}$$

en séries d'exponentielles décroissantes et identification des paramètres comme dans la méthode utilisée par Prony). Ces techniques nécessitent des ressources mémoire importantes afin de traiter l'ensemble des données temporelles recueillies. Le second groupe utilise les propriétés des transformées de Laplace ou de Fourier pour calculer la fonction de transfert ou la fonction de réponse en fréquence respectivement associée à la réponse impulsionnelle et ensuite à caractériser cette nouvelle fonction (ce qui fait l'objet du paragraphe suivant). Finalement, la causalité d'un filtre linéaire est équivalente à la causalité de sa réponse impulsionnelle ; la propriété de stabilité d'un filtre linéaire est reliée à la bornitude de sa réponse impulsionnelle et le filtre linéaire est stable si sa réponse impulsionnelle est sommable.

## D.2 Fonction de transfert - Fonction de réponse en fréquence

Lorsqu'on fait l'hypothèse de linéarité, nous avons noté dans l'introduction que l'on pouvait représenter l'objet par une seule fonction : la fonction de transfert ou la fonction de réponse en fréquence suivant le domaine d'application (Laplace ou Fourier).

Les deux notions de fonction de transfert et de fonction de réponse en fréquence sont étroitement liées : leur définition respective diffère uniquement par le choix d'une transformée différente : Laplace ou Fourier. Une fonction de transfert  $\mathbb{H}(r, r_0, p)$  du système étudié est la transformée de Laplace de sa réponse en un point  $r$  à une impulsion unitée localisée en un autre point  $r_0$ . La fonction de réponse en fréquence ou FRF  $H(r, r_0, \omega)$  associée à la fonction de transfert est la transformée de Fourier (lorsqu'elle existe) de sa réponse en un point  $r$  à une impulsion unitée localisée en un autre point  $r_0$ . Une fonction de transfert comme la FRF associée, peut être de type réceptance, mobilité, ou inertance suivant que la réponse du système est un déplacement, une vitesse ou une inertie respectivement. Le passage d'une transformée de Laplace à la transformée de Fourier associée s'effectue généralement en remplaçant  $p$  par  $i\omega$  <sup>(109)</sup>.

Lorsque le comportement de l'objet est régi par des équations différentielles à coefficients constants, les fonctions de transfert sont rationnelles et peuvent se mettre sous la forme :

$$\mathbb{H}(p) = \gamma \frac{N_{ij}(p)}{D_{ij}(p)} \quad (3.92)$$

où  $N_{ij}(p)$  et  $D_{ij}(p)$  sont des polynômes de la variable  $p$  dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

Examinons comment deux propriétés "classiques" de la réponse impulsionnelle à savoir réelle et causale se traduisent comme propriété pour la fonction de transfert ou la FRF

- Le fait que la réponse impulsionnelle soit réelle se traduit par la propriété d'hermitivité pour la FRF :  $H_{ij}(-\omega) = \overline{H_{ij}(\omega)}$ .
- La causalité entraîne que l'abscisse de sommabilité supérieure de  $\mathbb{H}$  est infinie et que le module de  $\mathbb{H}_{ij}(p)$  a au plus une croissance polynômiale <sup>(110)</sup>.
- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire soit causal est que la partie imaginaire de sa FRF soit la transformée de Hilbert de sa partie réelle <sup>(111)</sup>

Ainsi, dans le cas d'un système à  $N$  degrés de liberté avec un amortissement de type visqueux linéaire découplé (hypothèse de Basile), la FRF  $H_{ij}(\omega)$ , transformée de Fourier de la réponse du  $j^{\text{ème}}$  degré de liberté à l'impulsion unitée exercée au  $i^{\text{ème}}$  degré de liberté s'exprime sous la forme :

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\Psi_r)_i (\Psi_r)_j}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\tau_r \omega_r \omega)} \quad (3.93)$$

où les  $\Psi_r$  sont les formes propres du mode  $r$  pour le système conservatif associé,  $\omega_r$  et  $\tau_r$  sont respectivement la pulsation propre et le taux d'amortissement du mode  $r$ .

## D.3 Fonction d'analyse des singularités

Dès 1984<sup>(112)</sup>, j'ai étudié une transformation intégrale pondérée (TIP) de FRF, particulièrement adaptée à des structures présentant un comportement linéaire fortement amorti. Cette transformation dépend de deux

<sup>109</sup>Lorsque la transformée de Laplace n'a pas de pôles sur l'axe des imaginaires ou à droite de cet axe, alors le système est stable et  $H(r, r_0, \omega) = \mathbb{H}(r, r_0, p = i\omega)$ .

<sup>110</sup>Il existe deux constantes  $C_{ij} \in \mathbb{R}^+$  et  $n \in \mathbb{N}$  telles que :  $|\mathbb{H}_{ij}(p)| \leq C_{ij} (1 + |p|^2)^n$

<sup>111</sup> $H_{ij}(\omega) = i \mathcal{T} \mathcal{H} \{H_{ij}\}(\omega)$  où  $\mathcal{T} \mathcal{H}$  désigne la transformation de Hilbert qui a pour définition pour la fonction  $H_{ij} : \mathcal{T} \mathcal{H} \{H_{ij}\} =$

$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{H_{ij}(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega$

<sup>112</sup>En 1984, 4ème année à l'ENTPE pendant laquelle j'ai effectué mon DEA à l'E.C.L.

paramètres et il est montré dans que le calcul de la TIP se ramène à celui de deux transformations de Fourier qui sont effectués au moyen d'algorithmes de transformées de Fourier rapides.

Soient les valeurs expérimentales d'une fonction de transfert  $H_{ij}(\omega)$  de la structure étudiée ( définie comme le rapport du déplacement au point  $P_i$  sur la force de fréquence  $\omega$  appliquée au point  $P_j$ ) et que l'on notera par souci d'alléger les notations  $H(\omega)$  par la suite. On opère sur chaque  $H$  la transformation intégrale pondérée  $\Upsilon(a, b)$  suivante :

$$\Upsilon(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} g(\omega, a, b) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} \frac{A^2}{(\omega - A)^2} d\omega \quad (3.94)$$

où  $H'(\omega)$  désigne la dérivée de  $H(\omega)$  par rapport à  $\omega$  et  $A = a - ib$ .

Cette transformation facilite l'identification des pôles et des zéros de  $H$  en amplifiant leurs effets sur le tracé de  $\Upsilon(a, b)$  en fonction de  $a$  sans faire appel à une modélisation particulière de l'amortissement. De plus, on montre que les transformations intégrales  $\Upsilon(a, b)$  peuvent se calculer numériquement au moyen de deux transformées de Fourier. La méthode d'identification peut donc être facilement implantée dans les chaînes de traitement numérique qui disposent en général d'une F.F.T (Fast Fourier Transform) câblée.

On montre dans [ARTI6] que l'on peut représenter la TIP comme la transformée en ondelettes complexes de  $\frac{H'}{H}$  :

$$\Upsilon(a, b) = \frac{(b - ia)^2}{a} T_\psi \left[ \frac{H'}{H} \right] (b, a) \quad (3.95)$$

où  $\psi(\omega) = \frac{1}{(\omega - i)^2}$  est l'ondelette mère que l'on peut relier à l'ondelette de Cauchy d'ordre 1 qui a été définie dans le paragraphe précédent, par  $\psi(\omega) = -\psi_1(-\omega)$ . La fonction  $\psi$  possède comme  $\psi_1$  la propriété hermitique. Elle est aussi progressive comme  $\psi_1$ . On a vu que la fonction de réponse en fréquence d'un filtre linéaire si elle existe, jouit de la symétrie hermitique. L'ondelette  $\psi$  a une allure et des propriétés semblables à une FRF. L'écriture de la TIP sous la forme d'une transformation en ondelettes<sup>(113)</sup> facilite la compréhension des effets d'amplification de la TIP et permet une analyse fine des singularités (notion de force de la singularité dans la FRF à l'aide de l'exposant de Hölder - cf [ARTI6] ). Nous avons ensuite introduit la notion de fonction d'analyse des singularités (FAS) d'ordre  $n$  :  $\mathbf{H}_n(b, a)$  qui est définie comme une fonction de deux variables réelles  $b$  et  $a$  à l'aide de transformations intégrales d'une réponse dynamique. Plusieurs définitions sont proposées :

1. La FAS d'ordre  $n$  utilise la dérivée d'ordre  $n$  d'une fonction de transfert du système mécanique  $\mathbb{H}(p)$  avec  $p = a + ib$  :

$$\mathbf{H}_n(b, a) = (-1)^n 2\pi a^{\frac{n+1}{2}} \frac{d^n}{dp^n} \{ \mathbb{H}(p) \} \quad (3.96)$$

2. La FAS d'ordre  $n$  s'exprime à partir de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  comme la transformée de Fourier de  $h(t)$  filtrée par la fonction suivante

$2\pi a^{\frac{n+1}{2}} t^n e^{-at} \mathcal{Y}(t)$  où  $\mathcal{Y}(t)$  est la fonction de Heaviside :

$$\mathbf{H}_n(b, a) = 2\pi a^{\frac{n+1}{2}} \int_{\mathbb{R}} t^n e^{-at} \mathcal{Y}(t) h(t) e^{-ibt} dt \quad (3.97)$$

3. La FAS d'ordre  $n$  est au coefficient  $\frac{n!}{a^{\frac{n+1}{2}}}$  près, la transformation en ondelettes de la FRF  $H(\omega)$  avec l'ondelette mère  $\tilde{\psi}_n(s) = \frac{1}{(1+is)^n}$  qui est la conjuguée de l'ondelette de Cauchy d'ordre  $n$

$$\mathbf{H}_n(b, a) = \frac{n!}{a^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} H(\omega) \tilde{\psi}_n \left( \frac{\omega - b}{a} \right) d\omega \quad (3.98)$$

Chacune des trois définitions précédentes permet de comprendre les effets de la transformation intégrale proposée. Pour un filtre linéaire et causal à  $N$  degrés de liberté, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'une somme de fractions rationnelles simples. Les dérivées successives d'une fraction rationnelle simple font "augmenter" le degré du dénominateur amplifiant l'effet du pôle. La première définition (3.96) permet d'exprimer  $\mathbf{H}_n(b, a)$

$$\mathbf{H}_n(b, a) = 2\pi n! a^{\frac{n+1}{2}} \sum_{r=1}^N \left[ \frac{A_r}{(a + ib - p_r)^n} + \frac{\overline{A_r}}{(a + ib - \overline{p_r})^n} \right] \quad (3.99)$$

<sup>113</sup>L'originalité de cette approche est que l'on applique la transformée en ondelettes à une fonction dépendant de la fréquence. Habituellement, la transformée en ondelettes est appliquée à des signaux temporels! afin d'obtenir une représentation temps-fréquence.

	MOR	CAU	EXP
$\ \psi\ _2^2$	$\sigma\sqrt{\pi}$	$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$	$\frac{1}{\beta\lambda}$
$\varphi_1(t)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}$	$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\pi}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)^{n+1}$	$\beta\lambda e^{-2\lambda\beta t }$
$\varphi_2(\omega)$	$\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}e^{-(\omega-\beta)^2\sigma^2}$	$\frac{2}{(2n)!}(2\omega)^{2n}e^{-2\omega}\mathcal{Y}(\omega)$	$\frac{2}{\pi\lambda\beta\left[1+\left(\frac{\omega-\beta}{\lambda\beta}\right)^2\right]^2}$
$t_\psi$	0	0	0
$\omega^{(1)}$	$\beta$	$n$	$\beta$
$\omega_\psi$	$\beta$	$n + \frac{1}{2}$	$\beta$
$\Delta t_\psi$	$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2n-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\lambda\beta)}$
$\Delta\omega_\psi$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2n+1}$	$\lambda\beta$
$\mu(\psi)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$Q$	$\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2n+1}$	$\frac{1}{2\lambda}$
$m_{3t}$	0	0	0
$m_{3\omega}$	0	$\frac{2}{\sqrt{2n+1}}$	0
$m_{4t}$	3	$3\frac{2n-1}{2n-3}$	6
$m_{4\omega}$	3	$3\frac{2n+3}{2n+1}$	$\infty$
$c_\psi$	$\infty$	$4\pi^2\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!}{(n!)^2}$	$\infty$
$C_1$	$2\sigma^2$	$\frac{2}{n-1}$	$\frac{2}{(\lambda\beta)^2}$
$C_2$	$\sqrt{2\pi}\sigma^3$		$\frac{4}{(\lambda\beta)^3}$

**Tab. 3.1** Principales fonctions et caractéristiques des ondelettes mères à l'étude : MOR=Morlet ; CAU=Cauchy ; EXP=exponentielle.

## Chapitre 4

# Applications des techniques de modélisation et d'identification de paramètres à des cas numériques et réels

Ce chapitre présente quelques unes des applications des techniques de modélisation et d'identification que j'ai réalisées durant mes années de recherche. Il est divisé en trois titres. Le premier titre présente l'application de quatre méthodes originales d'identification dynamique sur des résultats d'essais vibratoires numériques ou expérimentaux en laboratoire. Les deux premières méthodes sont modales (linéaires). Pour la première méthode, les fonctions de réponse en fréquence (FRFs) d'un système à multi-degrés de liberté linéaire, obtenues numériquement, sont traitées avec la transformation intégrale pondérée (TIP) présentée au chapitre précédent<sup>(1)</sup>. Dans la deuxième méthode, les vibrations forcées, sous excitations harmoniques, de la maquette d'avion du groupe Garteur sont analysées par la Fonction d'Analyse des Singularités présentée également au chapitre précédent<sup>(2)</sup>, afin d'estimer ses caractéristiques modales. Les deux dernières techniques développées sont non linéaires : elles sont appliquées à des systèmes présentant un comportement non linéaire tels une plaque avec un système de frotteurs et une poutre avec une non-linéarité locale de type rigidité non linéaire en déplacement (cubique ou Duffing).

Le second titre qui constitue un développement un peu long que le précédent, s'intéresse au comportement et à la vulnérabilité des bâtiments courants. Il comprend cinq sous-titres qui traitent respectivement de : (1) l'identification linéaire du comportement sismique de bâtiments, (2) la détection, la caractérisation et l'identification des non-linéarités, (3) la modélisation du phénomène de torsion dans le comportement de bâtiments, (4) l'analyse des spectres de réponse et du coefficient de comportement et (5) l'interaction site-ville et aléa sismique en milieu urbain.

Le troisième et dernier titre est consacré à la dynamique des véhicules légers et lourds en interaction avec des ouvrages du génie civil (routes ou ponts). Il est formé de trois sous-titres. Le premier présente quelques travaux sur la modélisation du mouvement vertical de véhicules légers. Dans le second sous-titre, la technique de filtrage de Kalman est rapidement décrite. Elle est ensuite appliquée à l'identification des paramètres d'un véhicule et de l'état de l'ouvrage. Le dernier sous-titre développe le pesage en marche de véhicules lourds sur ouvrages d'art.

## A Identification dynamique à partir de résultats d'essais numériques et de laboratoire

### A.1 Vibrations forcées d'un système MDDL linéaire

Une méthode d'identification modale dans le domaine fréquentiel a été proposée à partir du calcul de la transformation intégrale pondérée (TIP) présentée dans le chapitre précédent. Voici le schéma d'identification proposé :

---

<sup>1</sup>cf. page 86.

<sup>2</sup>cf. page 87.

1. Acquisition expérimentale d'une fonction de réponse en fréquence  $H(\omega)$  et de sa dérivée  $H'(\omega)$  à partir d'un essai de vibration sur la structure.
2. Calcul de la TIP  $\mp(a, b)$  à partir de deux transformées de Fourier (F.F.T. discrètes) pour un  $b = b_1$  fixé :
  - Calcul de  $f_1(t)$  :

$$f_1(t) = 2i \Im \left[ \int_0^{+\infty} \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} \exp^{2i\pi\omega t} d\omega \right]$$

où  $\Im$  désigne la partie imaginaire du nombre complexe.

- Calcul de  $f_2(a)$  :

$$f_2(a) = \int_0^{+\infty} f_1(t) t \exp^{-2\pi b_1 t} \exp^{-2i\pi a t} dt$$

- Calcul de  $\mp(a, b)$  :

$$\mp(a, b) = -4\pi^2 (a - ib_1)^2 f_2(a)$$

3. Repérage des coordonnées  $(a_{2j}, E_j)$  de chacun des extréma de  $\Im[\mp(a, b)]$
4. Estimation des parties réelle et imaginaire des pôles et des zéros de  $H$  :

$$u_j^*(b_1) \simeq a_{2j} \quad v_j^*(b_1) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|E_j|}} |\sqrt{|u_j^{*2} - b_1^2|} - b_1$$

5. - Possibilité d'améliorer les résultats pour un pôle ou un zéro particulier en reprenant les calculs à l'étape 2 avec  $b = v_j^*(b_1)$ .

La TIP a été testée sur des données numériques : les FRFs de type réceptance d'un système masse-ressort-amortisseur à 4 degrés de liberté (cf. [ARTI1]). Les résultats obtenus pour l'identification à partir des données simulées numériquement montrent que cette technique assure une bonne estimation des modes de la structure car elle permet de faire ressortir ceux ayant une faible participation au point de mesure considéré.

L'application de cette technique à des structures réelles achoppe toutefois sur l'obtention de la dérivée de  $H$  surtout lorsque les signaux sont très bruités.

On peut appliquer cette technique premièrement à  $H$  pour obtenir les pôles de  $H$ , puis à nouveau appliquée à  $\frac{1}{H}$  pour obtenir les zéros de  $H$ , le problème de l'obtention de la dérivée étant ainsi évité.

On a montré au chapitre précédent, comment on peut relier la TIP à une transformation en ondelettes  $T_\psi \left[ \frac{H'}{H} \right](b, a)$  avec une ondelette mère  $\psi(\omega)$  qui est reliée à l'ondelette mère de Cauchy  $\psi_1(\omega)$  d'ordre 1 par :  $\psi(\omega) = -\psi_1(-\omega)$ . Ce qui nous a conduit à proposer une nouvelle fonction intégrale ou fonction d'analyse des singularités (FAS) d'ordre  $n$  qui généralise la TIP avec une ondelette mère de Cauchy d'ordre  $n$ . Le titre suivant applique la FAS aux vibrations forcées d'une maquette d'avion utilisée par le groupe Garteur <sup>(3)</sup>.

#### *Production réalisée*

- 1 rapport de DEA personnel ECL 1984 [THE1]
- 1 chapitre (IV) de ma thèse 1990 [THE2]
- 1 rapport de stage d'option (Ecole Polytechnique) de Younés Belcadi 1997.
- 3 articles dans des revues à comité de lecture
  - 1 au Journal Sound and Vibration : 1986 [ARTI1]
  - 1 à la revue Meccanica 1997, [ARTI6]
  - 1 au compte-rendu à l'Académie des Sciences 1999, [ARTI8]

## **A.2 Vibrations forcées d'une maquette d'avion (essai Garteur)**

Une maquette d'avion<sup>(4)</sup> représentant schématiquement le comportement dynamique d'un planeur a été construite pour réaliser au niveau européen, une étude comparative en analyse modale expérimentale par le groupe Garteur. La structure est formée de deux sous-structures en aluminium représentant respectivement

<sup>3</sup>GARTEUR : Group for Aeronautical Research and Technology in Europe. Cette organisation a été formée à partir de 1973 pour la collaboration de recherche en Europe dans le domaine de l'aéronautique. Elle comprend actuellement 7 nations dont la France, l'Allemagne, l'Italie, les Pays-Bas, l'Espagne, la Suède et l'Angleterre.

<sup>4</sup>Cette maquette a été initialement conçue et testée à l'ONERA. Des jeux de FRF expérimentales et de données modales ont aussi été réalisées par le DLR (établissement aérospatial allemand) et par l'Université de Manchester (Aerospace Engineering Division).

ailles/réservoirs et fuselage/dérive. Elles sont connectées au moyen de deux plaques métalliques boulonnées. Elle est décrite en détail dans le rapport de Degener<sup>(5)</sup> qui inclut la géométrie, les données matérielles ainsi que le plan des essais. Parmi les rapports présentant les résultats comparés des différentes équipes, citons le rapport d'Etienne Balmes<sup>(6)</sup>.

Nous avons utilisé les FRFs mesurées à partir des essais sur la maquette Garteur pour tester l'efficacité de technique d'identification modale utilisant la FAS présentée au chapitre précédent. Ces essais ont eu lieu à l'ONERA<sup>(7)</sup>. Les conditions aux limites libre-libre sont réalisées au moyen de trois suspensions élastiques dont le 1er mode de suspensions (pompage) est à  $2Hz$ . Le corps de la structure est équipé de 24 accéléromètres et deux excitateurs électrodynamiques délivrent deux excitations large bande décorréées. Plusieurs FRF de type inertance ont été identifiées par la technique d'identification utilisant la FAS. La FAS d'ordre  $n$  permet d'accentuer les structures singulières que sont les résonances sur les FRF. L'analyse des extrémums de la FAS permet l'identification directe des fréquences de résonance et des amortissements associés. Les résultats de l'identification ont été comparés à ceux obtenus par deux autres techniques utilisant la toolbox IDRC<sup>(8)</sup> du logiciel MATLAB. La première traite les données sur tout l'intervalle fréquentiel d'étude et la seconde applique IDRC avec lissage appliquée aux trois intervalles fréquents successifs :  $4 - 25Hz$ ,  $25 - 40Hz$  et  $40 - 63Hz$ . Ces deux techniques effectuent une optimisation non linéaire du modèle pôle/résidu, recalculant les résidus après chaque itération. Elles ne génèrent pas de modes supplémentaires, elles estiment des valeurs des paramètres proches des valeurs initiales pour l'algorithme de minimisation. Ces valeurs initiales sont obtenues respectivement par la méthode de peak-picking pour les fréquences et par la technique de la demi-puissance pour les coefficients d'amortissement. Les résultats des trois techniques d'identification sont présentés pour une des FRFs mesurées dans [CONF31]. Les résultats obtenus par les trois techniques sont très voisins et nous permettent de conclure que les résultats obtenus avec la FAS sont prometteurs.

Ce travail sur la FAS s'est poursuivi en collaboration avec Honoré Yin et Denis Duhamel actuellement au LAMI, en utilisant des fonctions mères de type Cauchy mais avec un exposant  $n$  qui n'est plus entier mais réel positif. Une procédure efficace pour l'estimation des fréquences propres et des taux d'amortissement est proposée dans [ARTI12] et l'efficacité de la méthode est illustrée à la fois sur des données numériques et expérimentales de FRFs.

On peut finalement noter que dans le cadre de l'Action COST F3 "Structural Dynamics" de 1997 à 2001<sup>(9)</sup>, plusieurs groupes de recherche dont la Belgique, la France, l'Allemagne et l'Angleterre ont travaillé sur le benchmark du groupe Garteur. Chaque équipe a maillé la structure Garteur à l'aide de leur propre modèle EF en utilisant des éléments de poutres ou de coques. Les données modales obtenues par le DLR ont été utilisées pour corriger ces modèles EF au moyen de techniques de recalage et les résultats ont été publiés récemment dans un numéro spécial du Journal *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 17, Issue 1, Janvier 2003.

#### *Production réalisée*

- 2 rapports de stage d'étudiants Princeton : Andrew Horchler 1998 et Xavier Vazquez-Gil 1999.
- 1 article dans des revues à comité de lecture :
  - 1 au Journal Sound and Vibration : 2003 [ARTI12].
- 2 publications dans colloque avec actes :
  - 1 à 2nd Int. Conference on Identification in Engineering Systems, Swansea, 1999 [CONF31].
  - 1 au 4ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 1999 [CONF32].

### **A.3 Vibrations forcées d'une plaque avec frottement**

La plaque étudiée est une plaque en duralumin, de masse  $18.6Kg$  encastrée sur un bord (cf. [CONF13] pour la description précise de l'encastrement), libre sur le bord diamétralement opposé ; l'un des deux bords restant est libre et sur l'autre, est installé le système de frotteurs. La campagne d'essais a été menée en 1990 à l'ONERA<sup>(10)</sup>. La non-linéarité de friction est introduite au moyen d'un système pouvant être déplacé le long

<sup>5</sup>Degener, M. and Hermes, M., Ground Vibration Test and Finite Element Analysis of the GARTEUR SM-AG19 Testbed, Deutsche Forschungsanstalt für Luft-und Raumfahrt e.V. Institut für Aeroelastik (23200), (October 1996).

<sup>6</sup>Balmes, E., Garteur Group on Ground Vibration Testing Results from the Tests of a Single Structure by 12 Laboratories in Europe, IMAC (1997).

<sup>7</sup>Citons le rapport de Philippe Fargette. Garteur group on GVT (ground vibration test) methods. Results from ONERA. Technical report RT31/1677 RN, ONERA, 1996.

<sup>8</sup>E. Balmes. Structural Modeling Toolbox - Version 2.0 MATLAB, 1996.

<sup>9</sup>On peut citer deux références se rapportant au COST F3 : une personnelle [CONF35] et une autre : J-C. Golinval & M. Link, 2003. COST F3 "Structural Dynamics" (1997-2001) - An European co-operation in the field of science and technology, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 17 n°1, pp. 3 - 7.

<sup>10</sup>au sein du Service de Vibrations au Sol (D. Gravelle & Bruno Guillermin). Les études ont duré de 1990 à 1992.



d'un bord libre de la plaque ; elle est réalisée par le frottement d'un disque de celoron (coton+résine) sur un disque de duralumin. L'intensité du frottement est réglable. La plaque est maillée par une vingtaine de capteurs accélérométriques distribués sur cinq rangées du bord encastré au bord libre et collés sur la plaque. Les signaux récupérés sont des accélérations qui sont intégrés pour obtenir des vitesses. L'excitation est réalisée par un excitateur électrodynamique avec la mesure de la force (force nominale 6N). Dans une première phase, la technique d'appropriation modale a été utilisée. Cette technique d'identification linéaire est basée sur l'appropriation des forces d'excitation harmoniques de façon à isoler un mode. Les fréquences des forces d'excitation sont alors proches de la fréquence de résonance. Le critère utilisé est celui de la résonance de phase qui pour un système linéaire à  $N$  degrés de liberté avec amortissement visqueux, se traduit par le fait que le déplacement (respectivement la vitesse) de chaque point de la structure est en quadrature de phase (respectivement en phase ou en opposition de phase) avec les forces d'excitation. L'excitation appropriée doit compenser les forces d'amortissement visqueux. La forme de la vibration induite par cette force d'excitation est proportionnelle, à une constante près, à la forme du mode du système conservatif associé. Cette approche modale a été appliquée au système de la plaque sans le système de frotteurs. Cette procédure est souvent utilisée principalement dans le domaine de l'aéronautique car le nombre de modes dans le domaine des basses fréquences entre 0.5 et 40 Hz est relativement faible par contre le nombre de degrés de liberté peut devenir relativement important. De plus, cette méthode fondée sur le principe de linéarité, réagit correctement aux effets non linéaires de par le fait qu'elle travaille au voisinage de la résonance d'un oscillateur. Cette technique a été appliquée à la plaque seule et les résultats ont été comparés à ceux obtenus à l'aide de la méthode EF (maillage de 98 éléments de plaque mince avec 110 noeuds). Les trois premières fréquences propres obtenues avec le logiciel EF sont de 16% supérieures à celles obtenues par la méthode d'appropriation modale. De plus, on observe un mode de bâti dont la fréquence est proche de la première fréquence propre de la plaque. La rigidification entraînée par la discrétisation de la plaque n'est pas suffisante pour expliquer l'écart entre valeurs théorique et mesurée : la modélisation du système de fixation de la plaque dans le bâti dans l'essai à l'aide d'un encastrement parfait n'est pas correcte. Le serrage des vis de l'encastrement a été refait et le maillage a été rebâti en tenant compte des deux rangées de vis. Nous avons relâché la composante transverse du déplacement des 17 noeuds des deux rangées de vis et nous avons ajouté une masse et une rigidité à chacun des noeuds de telle sorte que la fréquence propre obtenue soit proche de celle du bâti. L'écart entre les trois premières fréquences propres diminue alors entre 6% et 10%. Les trois premiers modes obtenus par la technique d'appropriation et par les éléments finis ont une allure semblable.

Ensuite, la méthode d'appropriation modale a été appliquée à la plaque avec frotteurs. On note une augmentation importante pour les fréquences du premier mode de flexion et en particulier de celui de torsion. En conclusion de cette première étape, l'application de la méthode d'appropriation modale à un système non linéaire conduit à une linéarisation du comportement et les coefficients généralisés identifiés dépendent de l'amplitude de la force d'excitation harmonique. Ces coefficients sont obtenus pour la plus petite valeur de la fréquence de résonance et le niveau de la force d'excitation est obtenu en examinant l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de la force d'excitation.

En parallèle, les coefficients de frottement statique et dynamique ont été estimés expérimentalement. Enfin, nous avons utilisé une procédure d'identification non linéaire (cas faiblement non linéaire) dans le domaine fréquentiel basée sur un modèle qui prend en compte le comportement faiblement non linéaire comme une perturbation sur les fréquences propres du système linéaire. On fait l'hypothèse qu'il y a pas ou peu de couplage entre le mode considéré et les autres modes. Le modèle de FRF s'écrit alors au voisinage du mode  $k$  considéré en fonction de la pulsation propre  $\omega_k$  et du mode propre  $\Psi_k$  correspondant :  $H(\omega) = u + j\omega v + \frac{t_k}{j\omega - s_k \overline{Pert_k(\omega)}}$  où la perturbation vaut :  $Pert_k(\omega) = (1 + \sum_i \alpha_i (A\omega^{p_{k_i}})^{q_{k_i}})$  et avec  $s_k = j\omega_k - \tau_k \omega_k$  et  $t_k = \Psi_k^t \Psi_k F$  où  $F$  désigne le vecteur des forces d'excitation. On suppose que le mode ne change pas avec l'amplitude de la force d'excitation. Les résultats sont publiés dans [CONF12].

Notons qu'une étude semblable a été réalisée et fait l'objet d'un rapport de DEA (DEA de Philippe Viot) ; l'essai monté consiste en l'assemblage de deux poutres par un joint non linéaire.

#### *Production réalisée*

- **3** rapports de DEA (citons les rapports de Florian Hehenberger et de Philippe Viot).
- **2** publications dans colloque avec actes :
  - 1 à l'Euromech 280, ECL, 1991 [CONF12]
  - 1 au 2ème Colloque National en Calcul des Structures, 1995 [CONF22]

lieu de l'essai	corps d'épreuve	module d'Young (Pa)	coefficient de Poisson	longueur (mm)	largeur (mm)	épaisseur (mm)
LTAS Liège	poutre principale plaque mince	$2.1 \cdot 10^{11}$	0.35	700	14	14
		$2.1 \cdot 10^{11}$	0.35	700	14	0.5
ONERA	Plaque	$7.4 \cdot 10^{10}$	0.34	1200	400	13.8

**Tab. 4.1** Caractéristiques géométrique et mécanique des corps d'épreuve

#### A.4 Vibrations libres d'une poutre avec une non-linéarité locale

La poutre étudiée est une poutre en acier encastree à une extrémité et avec une non-linéarité locale à l'autre extrémité. La campagne d'essais a été menée en 2001 par l'Université de Liège<sup>(11)</sup>. Le corps d'épreuve est constitué de l'assemblage de deux éléments : l'élément principal est une poutre en acier encastree à une de ses extrémités et l'élément secondaire est une poutre mince en acier encastree à une extrémité dans un bâti fixe et fixé à l'autre extrémité, à la poutre principale au moyen de vis. Les caractéristiques mécanique et géométrique des poutres sont données dans le tableau 4.1.

Le comportement non linéaire de l'assemblage est gouverné par la poutre mince lorsque des grands déplacements apparaissent durant l'essai. Pour réduire l'effet de la gravité, l'assemblage est monté verticalement : la poutre mince est en position verticale et le marteau excite la structure dans un plan horizontal<sup>(12)</sup>. Un calcul théorique montre que la non-linéarité est de type cubique et que la partie non-linéaire du tenseur des déformations n'est pas négligeable à cause du couplage entre la déformation axiale et la déformation transverse. Sept accéléromètres sont placés à intervalles réguliers sur la poutre pour mesurer sa réponse. La structure est excitée à l'aide d'un marteau d'impact et la force est mesurée. La réponse temporelle du système est mesurée sur une période de 1.34 sec avec une fréquence d'échantillonnage de 5120 Hz. Les données ont été traitées par la transformée en ondelettes continue (TOC) avec une ondelette mère de Cauchy définie au chapitre précédent<sup>(13)</sup>. La définition et les propriétés de la TOC a été présentée au chapitre précédent ainsi que les notions d'arêtes et de squelette<sup>(14)</sup>. La réponse temporelle transitoire en accélération d'une structure à un choc peut se mettre sous la somme de composantes modulées en amplitude et en fréquence qui ont la propriété d'asymptoticité<sup>(15)</sup> lorsque le comportement de la structure est linéaire ou faiblement non-linéaire (approximation du premier harmonique). La représentation des signaux mesurés sous formes d'arêtes et de squelette nous a conduit à proposer plusieurs fonctions indicatrices du comportement de la structure. On note  $a_{rk}^{(j)}(t)$  la kème arête obtenue par la mesure au point  $j$ . Les quatre fonctions proposées pour la kème arête sont exprimées en fonction de  $a_{rk}^{(j)}(t)$  :

$$f_{kj}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{n}{a_{rk}^{(j)}(t)} \quad (4.1)$$

$$r_{kj}(t) = \frac{\left| T_{\psi_n} [\ddot{u}^{(j)}] (t, a_{rk}^{(j)}(t)) \right| \dot{a}_{kj_0}^2(t)}{\left| T_{\psi_n} [\ddot{u}^{(j_0)}] (t, a_{rk}^{(j_0)}(t)) \right| \dot{a}_{kj}^2(t)} \approx \frac{A_{kj}(t)}{A_{kj_0}(t)} \quad (4.2)$$

$$\mu_{kj}(t) = \alpha_{kj}(t) - \alpha_{k(j-1)}(t) \quad \text{pour} \quad j > 1 \quad (4.3)$$

$$d_{kj}(t) = \ln(A_{kj}(t)) \quad (4.4)$$

où l'indice  $k$  est relatif à la kème arête, l'indice  $j$  indique le point de mesure sur la structure et parmi les indices  $j$  pour un  $k$  donné, l'indice  $j_0$  est celui où la moyenne de l'amplitude  $A_{kj_0}(t)$  est maximum.  $A_{kj}(t)$  et  $\alpha_{kj}(t)$  sont respectivement l'amplitude et la phase de la kème composante du signal. Dans le cas de systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté avec l'hypothèse d'amortissement proportionnel, les quatre fonctions indicatrices

<sup>11</sup>au sein du Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales - Département Vibrations et Identification des Structures dirigé par Jean-Claude Golinval.

<sup>12</sup>Si la poutre non-linéaire est montée horizontalement, la gravité a un effet sur la position initiale de l'assemblage et des effets non linéaires quadratiques sont à prendre en compte.

<sup>13</sup>cf. page 76.

<sup>14</sup>cf. page 82.

<sup>15</sup>On rappelle que la propriété d'asymptoticité se traduit principalement par le fait que les variations de l'amplitude sont plus lentes que les variations de la phase.

deviennent :  $f_{kj}(t) = \frac{\tilde{\omega}_k}{2\pi}$ ,  $r_{kj}(t) = |\Phi_{jk}|$ ,  $\mu_{kj}(t) = \frac{\pi}{2}(\text{sgn}(\Phi_{(j-1)k}) - \text{sgn}(\Phi_{jk}))$  et  $d_{kj}(t) = \text{Log}|\Phi_{jk}| + \text{Log}(\varrho_k) - \zeta_k \omega_k t$ . Le premier et le second indicateurs, respectivement  $f_{kj}(t)$  et  $r_{kj}(t)$ , désignent la fréquence instantanée et le “mode” instantané (avec une amplitude positive) associés à la kème composante. Ils sont constants dans le cas linéaire avec amortissement proportionnel,  $f_{kj}(t)$  désignant alors la kème pseudo-fréquence propre. Le troisième et le quatrième indicateurs respectivement  $\mu_{kj}(t)$  et  $d_{kj}(t)$  caractérisent la dissipation d’énergie suivant la kème composante :  $\mu_{kj}(t)$  caractérise la dissipation d’énergie entre deux points de la structure  $j$  et  $j - 1$  et  $d_{kj}(t)$  la décroissance globale de l’énergie dans la réponse transitoire de la kème composante. Dans le cas d’un système linéaire à plusieurs degrés de liberté avec amortissement visqueux proportionnel,  $\mu_{kj}(t)$  est constant et redonne le signe de l’amplitude du mode et  $d_{kj}(t)$  s’écrit sous la forme d’une droite. La déviation de ces indicateurs par rapport au comportement linéaire avec amortissement proportionnel permet de détecter, de caractériser et de localiser (si non-linéarité locale) les effets non-linéaires. Sur les données de la poutre de Liège, le comportement non linéaire de type Duffing est mis en évidence. Ainsi, la composante correspondant au sur-harmonique d’ordre 3 est nettement visible et le rapport de la fréquence instantanée de cette composante sur celle de la composante fondamentale est pratiquement constante et égale à 3. De plus, on a calculé l’expression de l’approximation au premier ordre (méthode KBM<sup>(16)</sup>) de la fréquence et de l’amplitude instantanées des vibrations libres d’un oscillateur non linéaire avec une non-linéarité de type Duffing et un faible amortissement visqueux. On considère donc l’équation différentielle suivante :  $\ddot{u}(t) + \omega^2 u = -\varepsilon [f_1(\dot{u}) + \psi_1(u)]$  qui régit les vibrations d’un oscillateur faiblement non linéaire et faiblement dissipatif. Dans le cas présent, nous avons :  $\psi_1(u) = \beta \frac{\omega^3}{h} u^3$ ,  $f_1(\dot{u}) = 2\omega \dot{u}$  et  $\varepsilon = \frac{h}{\omega}$  (avec les notations usuelles  $\varepsilon = \zeta$  taux d’amortissement “faible”). Dans l’approximation du premier ordre par la méthode de Krylov et Bogolyubov<sup>(17)</sup>, on suppose que la solution au premier ordre se met sous la forme d’un signal modulé en amplitude et en phase :  $u_1(t) = a(t) \cos(\alpha(t))$  avec  $a(t) = a_0 e^{-ht}$  et  $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t + \beta \frac{3}{16h} \omega a_0^2 (1 - e^{-2ht})$  où  $a(0) = a_0$  et  $\alpha(0) = \alpha_0$  <sup>(18)</sup>. On obtient ainsi l’expression de la première fréquence instantanée en fonction de l’amplitude instantanée sous forme d’une parabole. A partir des données extraites de la TOC des signaux transitoires mesurés avec une ondelette mère de Cauchy, on obtient la première fréquence instantanée du système en fonction de l’amplitude instantanée. A partir de cette fréquence et de son expression obtenue par la méthode KBM, on identifie les paramètres de l’oscillateur non linéaire avec une non-linéarité cubique. Finalement, l’erreur relative en norme  $L2$  sur l’évolution temporelle de la fréquence instantanée a été calculée ; elle est faible, de l’ordre de  $10^{-3}$ . En conclusion, pour la première fréquence de résonance, le modèle avec un faible amortissement visqueux et une non linéarité en déplacement de type cubique semble bien convenir.

#### *Production réalisée*

- **2** articles dans des revues à comité de lecture :
  - 2 dans Mechanical Systems and Signal Processing, 2003 [ARTI9] et [ARTI10]
- **2** publications dans colloque avec actes :
  - 1 à l’Euromech 437, Prague, 2002 [CONF42]
  - 1 au 16ème Congrès Français de Mécanique, Nice, 2003 [CONF44]
- **1** rapport de mission :
  - 1 mission à l’Université de Liège, 2001 [RAPP8]

<sup>16</sup>La méthode Krylov Bogoliubov Mitropolsky (KBM) est basée sur la méthode de la variation des constantes pour les équations différentielles faiblement non linéaires. Elle est appliquée ici au cas des vibrations libres d’un oscillateur non linéaire : la réponse est choisie sous la forme d’un signal modulé en amplitude et en phase  $a(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$  avec l’amplitude  $a(t)$  et la phase  $\varphi(t)$  qui varie “lentement”.

<sup>17</sup>Voici les formules donnant l’approximation au premier ordre par la méthode de Krylov et Bogolyubov :  $u_1(t) = a(t) \cos(\alpha(t))$  avec lorsque  $t_0 = 0$ ,  $a(0) = a_0$  et  $\alpha(0) = \alpha_0$ .

$t(a) = t_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{A_1(a)} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{A_1(a)}$

$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t B_1(a) dt = \alpha_0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(a) dt$

$A_1(a) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(-\omega a \sin(\alpha)) \sin(\alpha) d\alpha$  ne dépend que de  $f_1$ .

$B_1(a) = \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} \psi_1(a \cos(\alpha)) \cos(\alpha) d\alpha$  ne dépend que de  $\psi_1$ .

<sup>18</sup> $A_1(a) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(-\omega a \sin(\alpha)) \sin(\alpha) d\alpha = \frac{-2\omega^2 a}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) d\alpha$

$A_1(a) = -\omega a$  et finalement  $t(a) = -\frac{1}{\omega\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{A_1(a)} = -\frac{1}{h} \text{Ln} \left( \frac{a}{a_0} \right)$ . D’où  $a(t) = a_0 e^{-ht}$ .

et encore :

$\psi_1(a \cos(\alpha)) = \beta \frac{\omega^3 a^3}{4h} (\cos(3\alpha) + 3 \cos(\alpha))$

$B_1(a) = \frac{1}{2\pi\omega a} \beta \frac{\omega^3 a^3}{4h} \int_0^{2\pi} (\cos(3\alpha) + 3 \cos(\alpha)) \cos(\alpha) d\alpha = \beta \frac{3}{8h} \omega^2 a^2$  avec  $a(t) = a_0 e^{-ht}$

$B_1(a) = \beta \frac{3}{8h} \omega^2 a_0^2 e^{-2ht}$

$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(a) dt = \alpha_0 + \omega t + \beta \frac{3}{8h} \omega a_0^2 \int_0^t e^{-2ht} dt$

$= \alpha_0 + \omega t + \beta \frac{3}{16h} \omega a_0^2 (1 - e^{-2ht})$

## B Comportement et Vulnérabilité des bâtiments courants

Le travail de recherche sur les méthodes d'identification modale effectué pendant ma thèse a trouvé une application dès 1989 dans l'étude des réponses accélérométriques de bâtiments réels californiens soumis à des séismes<sup>(19)</sup>. Ces réponses ont été récupérées d'un programme de mesures californien<sup>(20)</sup>. Ce fut le point de départ d'une activité de recherche qui se poursuit jusqu'à présent avec des périodes plus ou moins productives d'un point de vue scientifique.

On peut diviser le travail effectué en cinq parties : la première partie est consacrée à l'identification dynamique du comportement linéaire de bâtiments, la seconde traite brièvement de la détection, de la caractérisation et l'identification des effets non-linéaires, la troisième s'intéresse à la modélisation du phénomène de torsion dans le comportement de bâtiments, la quatrième présente quelques réflexions sur les spectres de réponse et le coefficient de comportement, la dernière partie ouvre quelques perspectives sur l'interaction site-ville et aléa sismique en milieu urbain.

### B.1 Identification linéaire du comportement sismique de bâtiments

Lorsque les structures de génie civil sont soumises à de faibles niveaux d'excitation, tels que le vent ou les micro-séismes, leur comportement reste voisin du comportement linéaire et elles ne subissent pas de détérioration de telle sorte que le problème à résoudre est de type stationnaire. Nous<sup>(21)</sup> avons donc mis au point un algorithme d'identification des paramètres modaux d'un modèle de comportement linéaire plan du bâtiment avec amortissement (visqueux ou hystérétique) découplé suivant l'hypothèse de Basile.

La méthode d'identification linéaire permet d'estimer à partir des accélérogrammes, les fréquences et modes propres ainsi que les facteurs de participation ( par exemple en flexion ou en torsion) du bâtiment étudié. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrés de la somme sur tous les points d'instrumentation des différences entre les réponses temporelles ou fréquentielles du modèle linéaire et celles mesurées en structure. (cf. thèse de Hamid Afra<sup>(22)</sup>). Cette méthode a été appliquée sur 25 cas de bâtiments en domaine temporel et sur 13 cas en domaine fréquentiel. Les principaux résultats de cette recherche sont :

1. Les valeurs des coefficients d'amortissement visqueux sont, en général, dispersées entre 4% pour les structures métalliques et 8% pour les structures en béton armé. L'amortissement pour ces bâtiments reste faible et on vérifie bien que les deux modèles avec amortissement visqueux et hystérétique donnent le même comportement. La valeur du coefficient d'amortissement hystérétique vaut deux fois celle du coefficient d'amortissement visqueux.
2. La précision d'identification des fréquences de vibration est excellente ( incertitude = 0.4% pour la fréquence fondamentale ), mais elle est moins bonne pour les coefficients d'amortissement ( incertitude = 13% ).
3. Pour les bâtiments "réguliers", la réponse au niveau du toit est fortement dominée par sa composante fondamentale. Quant aux bâtiments de grande hauteur ( fréquence fondamentale inférieure à 1 Hz), les modes supérieurs présentent une contribution significative dans la réponse.

De plus, la comparaison de l'ensemble des résultats obtenus avec ceux prédits par les règlements parasismiques américains nous permet de faire les remarques suivantes :

1. La période fondamentale de vibration dépend principalement de la hauteur et du système de contreventement ( portiques ou voiles porteurs ) du bâtiment, et non du type de matériau utilisé ou de ses dimensions horizontales.
2. Les formules réglementaires UBC et ATC fournissent en général une valeur de la période fondamentale de vibration inférieure à celle de la période identifiée, ce qui permet de garantir une marge de sécurité

---

<sup>19</sup>Cette recherche s'est inscrite depuis 1990 et jusqu'en 1995 au sein de la recherche du Laboratoire central des Ponts et Chaussées dans le thème de recherche GE011 : *Etude des actions sismiques et de leurs effets sur les structures de Génie Civil* dont le chargé de thème était Pierre-Yves Bard. Ce thème comprenait plusieurs sujets de recherche dont le sujet 131032 intitulé *Comportement et Vulnérabilité des bâtiments courants* auquel mon travail de recherche était rattaché. Pierre-Yves Bard était aussi le responsable du sujet jusqu'en 1992 ; je lui ai succédé de 1993 à 1995.

<sup>20</sup>Le programme de mesures est le C.S.M.I.P : Californian Strong Motion Instrumentation Program.

<sup>21</sup>Cette étude a été réalisée en collaboration avec Hamid Afra qui après avoir effectué son stage de DEA sous ma direction, a démarré sous mon encadrement (M. Bernard Halphen étant le directeur de thèse), une thèse en octobre 1988 sur les méthodes d'identification du comportement sismique de bâtiments à partir de leurs réponses accélérométriques.

<sup>22</sup>H. Afra : " Identification du comportement sismique de bâtiments à partir de leurs réponses accélérométriques" thèse de doctorat de l'E.N.P.C.soutenue le 30/09/91 à l'ENPC.

suffisante. Pourtant, dans certains cas, les périodes réglementaires sont supérieures aux périodes identifiées à partir des données réelles ; cela entraîne une sous-estimation du coefficient d'amplification dynamique et par suite, une sous-estimation, dans le sens de l'insécurité, de la force sismique de dimensionnement. De plus, le calcul sismique par spectre de réponse donne de bons résultats à condition que les périodes de vibration soient bien estimées.

3. Des non linéarités de comportement ont été observées sur des bâtiments en béton armé soumis à des séismes de forte intensité.
4. La part des mouvements de torsion est relativement importante dans les réponses de certains bâtiments auquel cas, l'hypothèse du modèle linéaire plan n'est plus valable.

En conclusion, la méthode d'identification ainsi développée nous permet de prédire de façon correcte les réponses des bâtiments étudiés ou d'un bâtiment futur, semblable à ceux-là, à une éventuelle excitation sismique. De plus, au moyen d'une instrumentation sur le bâtiment que l'on veut étudier, cette méthode permet de contrôler les constructions existantes et de les conforter si nécessaire. L'identification des caractéristiques modales permet aussi la vérification de l'accord entre les valeurs des paramètres identifiés à partir d'essais réels et celles fournies par les règlements pour la conception et le dimensionnement. Les résultats obtenus ( périodes fondamentales, spectre de réponse ) ont donc été comparés avec ceux prédits par les règlements parasismiques américains en vigueur. Enfin, cette méthode peut être appliquée à d'autres ouvrages de génie civil ( barrages, ponts, ...) pour déterminer leurs caractéristiques dynamiques ; elle peut aussi s'appliquer et s'adapter à d'autres fins que le génie parasismique.

Cependant, l'étude de la réponse d'une structure à un séisme réel fort ( qui induit des charges dynamiques importantes ) nécessite normalement de choisir un modèle faisant intervenir des caractéristiques non linéaires et variant dans le temps. Le modèle linéaire plan utilisé pour l'identification du comportement sismique de bâtiments s'est révélé insuffisant pour représenter correctement la réponse de certains bâtiments ayant enregistré de forts niveaux d'accélération ; ceci s'expliquant par plusieurs phénomènes que le modèle précédemment utilisé ne peut pas prendre en compte : les non-linéarités, la torsion, l'interaction sol-structures.

#### *Production réalisée*

- 1 participation à un ouvrage collectif 1992 [LIVR1].
- 1 article aux Annales des Ponts et Chaussées 1990 [ART11].
- 3 publications dans colloque avec actes :
  - 1 à 9th European conference on earthquake engineering, Moscou 1990 [CONF8].
  - 1 à l'Int. workshop on seismology and earthquake engineering, Mexico 1991 [CONF9].
  - 1 à l'Euromech first European solids mechanics conference, Munich 1991 [CONF9].

## **B.2 Détection, caractérisation et identification des non-linéarités**

Le travail a donc été consacré dans une étape suivante, à la détection, la caractérisation et l'identification des non-linéarités. Nous avons d'abord trié les bâtiments pour lesquels les effets non-linéaires ne peuvent plus être négligés ; ce choix a été confirmé par la détection d'effets non linéaires dans les accélérations temporelles de ces bâtiments à l'aide d'une représentation non paramétrique par les séries de Wiener. Puis, nous avons caractérisé l'évolution temporelle des fréquences propres au cours du séisme à l'aide d'une analyse modale sur fenêtres temporelles mobiles. De plus, pour certains bâtiments, nous avons observé une dégradation de la rigidité à l'aide du nouveau paramètre de rigidité effective. Un modèle d'endommagement formé d'éléments élasto-plastiques qui cassent les uns après les autres a été ensuite identifié. Une représentation des forces internes par les polynômes de Chebyshev a été également étudiée.

Plus récemment, la procédure d'identification fondée sur le calcul de la TOC avec une ondelette mère de Cauchy et présentée ci-dessus<sup>(23)</sup>, a été appliquée aux réponses accélérométriques de deux bâtiments soumis à des chocs non destructifs. Le premier bâtiment testé (B1), construit en 1970 a sept étages (30 m long, 14 m large et 22 m haut) ; il est constitué de murs de contreventement en béton et de planchers de béton armé. Le second bâtiment (B2) est de quatre étages (20 m long, 10 m large et 14 m haut). Il a été construit en 1965, est fait de parpaings en maçonnerie et de planchers en béton armé. Ce dernier fait partie d'une série de trois bâtiments semblables accolés. Des essais non destructifs réalisés au Laboratoire Géomatériaux de l'ENTPE<sup>(24)</sup>

<sup>23</sup>cf. page 93.

<sup>24</sup>Ces essais ont été réalisés dans le cadre du projet : "Approche de la Vulnérabilité sismique par l'étude du comportement des bâtiments réels (C. Boutin, S. Hans, I. Erdin, M. Lorient 1999 Rapport de recherches - Contrat de plan Etat-Région Risque sismique. ENTPE - Département Génie Civil et Bâtiment (DGCB)). Le but de ce projet est d'améliorer l'estimation du risque sismique en

		<b>B1</b> <i>long</i>	<b>B1</b> <i>long</i>	<b>B1</b> <i>trans</i>	<b>B1</b> <i>trans</i>	<b>B2</b> <i>long</i>	<b>B2</b> <i>long</i>	<b>B2</b> <i>trans</i>	<b>B2</b> <i>trans</i>
		TOC	TF	TOC	TF	TOC	TF	TOC	TF
1er mode	fréq. (Hz)	4.25	4.24	4.53	4.58	5.30	5.20	5.30	5.15
	amort. %	3.1	3.5	3.2	3	8	5.5	8	5.3
2ème mode	fréq. (Hz)	13.3	13.1	-	-	6.1	6.1	6.1	6.0
	amort. %	3.3	4			7.8		7.8	

**Tab. 4.2** Caractéristiques modales des 2 bâtiments B1 et B2 (directions longitudinale et transverse) - TOC : transformation en ondelettes continue et TF : transformation de Fourier.

sont menés au moyen d'une pelleteuse mécanique qui vient frapper la façade des bâtiments. Les vibrations libres des bâtiments après le choc sont mesurées à l'aide d'accéléromètres placés au niveau des étages du bâtiment testé sur un intervalle d'environ 5 à 6 secondes. Au vu du faible niveau d'accélération de l'ordre de  $10^{-2}g$ , le comportement de la structure reste dans le domaine quasi-élastique. Pour le calcul numérique de la TOC, on tient de l'effet de bord qui a été étudié au chapitre précédent<sup>(25)</sup> ; d'ailleurs on note que sur la partie droite du signal (fin de l'enregistrement), le rapport signal/bruit<sup>(26)</sup> limite la validité de la méthode (ce qui constitue une raison supplémentaire de prendre en compte l'effet de bord). On prend comme facteur de qualité<sup>(27)</sup>  $Q = 7.09$  ( $n = 100$ ) pour le premier bâtiment et  $Q = 22.37$  ( $n = 1000$ ) qui montre des fréquences propres proches.

A partir des arêtes extraites à partir du module ou de la phase de TOC, la procédure d'identification semblable à celle employée pour les vibrations de la poutre avec une non-linéarité locale (cf. A.4) a été utilisée et nous a permis d'estimer les caractéristiques modales (fréquence propre, taux d'amortissement et forme modale) pour les deux premiers modes (les modes plus élevés ne sont pas accessibles à cause du pas d'échantillonnage insuffisant des enregistrements). Les résultats sont donnés dans la tableau 4.2 et sont comparés à ceux obtenus par des méthodes traditionnelles utilisant la transformation de Fourier (peak picking, largeur de bande).

On note que pour le bâtiment 1 (B1), les oscillations dans les directions longitudinales et transverses semblent complètement indépendantes. Par contre, pour le bâtiment 2 (B2), on note la même fréquence dans les deux directions. Cela suggère un mode de torsion qui peut être expliqué par la présence du bâtiment accolé, entraînant une cinématique avec excentricité. C'est le cas de l'interaction structure-structure.

Pour l'amortissement modal, on note une différence importante pour les deux bâtiments (B1 : 3% et B2 : 6–8%) ; ce peut être expliqué par la transmission de l'énergie du choc dans les bâtiments voisins. Ce phénomène entraîne une rapide décroissance de l'amplitude des signaux, dûe aux pertes d'énergie par interférence.

Le traitement par la TOC met systématiquement en évidence une légère décroissance des fréquences instantanées de quelques pourcents. Ces variations peuvent être comprises par des effets de comportement faiblement non linéaire. Le tracé du carré de la pulsation propre<sup>(28)</sup> instantanée en fonction du déplacement au toit montre une décroissance quasi-linéaire qui peut être interprétée comme une variation de la rigidité globale de la structure et de l'interaction sol-structure en fonction d'un niveau de déformation et plus précisément d'un radoucissement lors de l'augmentation du niveau de l'excitation. Ce phénomène est en accord avec le comportement classique des géo-matériaux ; les variations de la fréquence demeurent faibles mais ce phénomène a déjà été remarqué avec des essais harmoniques.

#### *Production réalisée*

– 1 rapport de stage d'un étudiant italien (tesi di laurea) Fausto Conti 1999.

environnement urbain. Il est basé sur des essais non destructifs sur des bâtiments modernes construits entre les années 1955 et 1975 qui abritent environ le tiers des logements en France. Les expériences ont été réalisées par l'équipe de Claude Boutin, sur des bâtiments désaffectés, avant et en cours de démolition. Une large campagne expérimentale associant des mesures en bruit de fond, en vibrations forcées et sous chocs a été menée.

<sup>25</sup>cf. paragraphe B.4.1.

<sup>26</sup>Les mesures sont bruitées à cause de perturbations électriques ou mécaniques. On estime à  $10^{-4}g$  la valeur moyenne du bruit.

<sup>27</sup>On rappelle que :  $Q = 0.5\sqrt{2n+1}$ .

<sup>28</sup>Dans les modèles de poutre habituellement utilisés pour la modélisation simplifiée des bâtiments, le carré des pulsations propres est proportionnel à la rigidité effective du modèle.



- 1 article dans les annales de l'ITBTP, 1995 [ARTI5].
- 6 publications dans colloque avec actes dont :
  - 2 au 10ème congrès Français de Mécanique, Paris, 1991 [CONF10] et [CONF11].
  - 1 à 10th European conference on earthquake engineering, Madrid, 1992 [CONF14].
  - 1 au 3ème colloque national de génie parasismique, St Rémi-les-Chevres, 1993 [CONF16].
  - 1 à la COST F3 Conference "System Identification and Structural Health Monitoring" Madrid, 2000 [CONF34].
  - 1 au 5ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2001 [CONF36].

### B.3 Modélisation du phénomène de torsion dans le comportement de bâtiments

Lorsque les structures des bâtiments présentent des dissymétries de répartition de masse et/ou des dissymétries d'ordre architectural (irrégularités en plan et/ou décrochements en élévation), les effets des mouvements de torsion deviennent importants et ne peuvent plus être négligés.

La première phase de cette recherche a été consacrée à tenter de répondre à la question suivante :

*"Comment peut-on modéliser la torsion dans un bâtiment ?".*

Avant de s'intéresser à la torsion dans un bâtiment dans sa totalité, nous nous sommes consacrés à la torsion des poutres<sup>(29)</sup>. Nous avons donc cherché à répondre à la question suivante :

*"Comment peut-on modéliser la torsion dans une poutre ?".*

Le modèle de torsion des poutres le plus utilisé (par exemple dans les codes Eléments Finis) est le modèle de torsion pure ou uniforme de Saint-Venant<sup>(30)</sup>. L'état de contraintes est un état de cisaillement simple et la torsion pure s'accompagne d'un gauchissement des sections. L'équation aux dérivées partielles régissant l'angle de torsion  $\theta(x, t)$  en vibrations libres, pour une poutre selon Saint-Venant est :

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( GI \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

où  $I_\theta$  est l'inertie de masse par unité de longueur,  $G$  le module de Coulomb ou de torsion,  $I$  est la constante de torsion qui s'exprime à l'aide de la fonction de contraintes.

Il est à remarquer que les équations de la torsion et du mouvement longitudinal sont du même type. Dans la réalité, les poutres sont reliées entre elles et/ou à d'autres éléments et sont ainsi empêchées de gauchir. Timoshenko<sup>(31)</sup> affirme que dans le cas des barres de section pleine, l'impossibilité de gauchissement a une influence négligeable sur l'angle de torsion si les dimensions transversales de la poutre sont faibles par rapport à sa longueur.

Un autre théorie pour la prise en compte de la torsion dans les poutres est l'analyse de la torsion gênée par Vlasov. Elle permet de définir en plus des grandeurs habituelles comme l'effort normal, les moments fléchissants, ..., une nouvelle grandeur statique ou bimoment<sup>(32)</sup>  $B$  correspondant au gauchissement de la section. On a :

$$B = \int_{\Sigma} \sigma \delta dS$$

où  $\delta$  représente la surface sectorielle.

Le couple de torsion appliqué au système s'écrit alors comme la somme du couple de torsion associé à la flexion pure et du moment de torsion fléchi

$$M = GI \frac{\partial \theta}{\partial x} - EJ_\delta \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}$$

<sup>29</sup>Une poutre est le solide engendré par une aire plane  $\Sigma$ , bornée dont le centre d'inertie  $G$  décrit une courbe  $(C)$  dans l'espace ; le plan contenant l'aire  $\Sigma$  restant normal à la courbe  $(C)$ . L'axe  $Gx$  est tangent à la fibre moyenne.

<sup>30</sup>Le problème résolu par Saint-Venant, en 1858, à l'aide de l'élasticité linéaire, est celui de l'équilibre d'un cylindre de génératrices parallèles à un axe  $Ox$ , qui n'est chargé que sur ses bases. La solution du problème de Saint-Venant est fondée sur deux principes :

(1) le principe de Saint-Venant (lié à l'élancement de la poutre) qui énonce que les contraintes et par suite les déformations dans une zone suffisamment éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que des éléments de réduction du torseur constitué par ces forces.

(2) le principe de Navier Bernoulli généralisé qui énonce que deux sections infiniment voisines de la poutre deviennent après déformation, deux sections infiniment voisines, généralement gauches. Ces sections sont superposables par déplacement.

<sup>31</sup>S.P. Timoshenko, 1968. Résistance des matériaux, Tomes I et II, Dunod.

<sup>32</sup>contrairement à un moment, le bimoment représente une force généralisée équilibrée, c'est-à-dire une force statiquement équivalente à zéro.



où  $J_\delta$  désigne l'inertie sectorielle :  $J_\delta = \int_\Sigma \delta^2 dS$ .

On peut remarquer que la représentation mathématique de la torsion faite par Vlasov est analogue à la théorie de la flexion des poutres.

L'équation des vibrations libres de torsion pour une poutre selon Vlasov est :

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( GI \frac{\partial \theta}{\partial x} - EJ_\delta \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \right)$$

Nous nous sommes ensuite intéressés aux différentes modélisations pouvant prendre en compte les effets dûs à la torsion dans le comportement sismique de bâtiments. Les modèles par ordre croissant de raffinement sont :

- Le modèle brochette avec masses excentrées
- Les modèles plans
- Le modèle “manivelle” proposé par Jean-Pierre Touret<sup>(33)</sup>
- Les modèles par matrice de transfert
- Le modèle Eléments Finis tridimensionnels

Parmi les modèles par matrice de transfert, nous avons mis au point un modèle original constitué par la succession de planchers assimilés à des solides rigides et à des éléments de contreventements de type poteau ou voile entre deux planchers consécutifs assimilés en première approximation à des liaisons élastiques de type poutre. Ce modèle est appelé modèle “brochette de solides rigides” et sous forme abrégé BSR. Les hypothèses du modèle BSR sont :

- Les centres de gravité des planchers ne sont pas nécessairement alignés.
- Les axes principaux d'inertie des planchers ne sont pas nécessairement parallèles.
- Les planchers peuvent se déplacer avec les six degrés de liberté de l'espace (trois translations et trois rotations).
- Les forces d'inertie gyroscopiques peuvent ne pas être négligées.
- Toutes les sollicitations des éléments de liaison peuvent être considérées.

Cette recherche a fait l'objet d'un contrat de recherche entre EDF-SEPTEN à Lyon et le CNRS (LCPC)<sup>(34)</sup>. Les équations de la dynamique de ce modèle ont été écrites à l'aide du formalisme de la théorie des groupes de Lie. Au lieu d'utiliser l'approche “classique” qui opère sur des vecteurs (vecteur déplacement, vitesse ou accélération d'un point du solide rigide), nous avons choisi de travailler sur les déplacements du corps rigide eux-mêmes qui sont décrits par des applications affines conservant les distances et l'orientation. Ces applications forment un groupe de Lie<sup>(35)</sup>. La difficulté est alors d'écrire le principe fondamental de la dynamique du solide rigide en particulier de dériver une application (dans un groupe) par rapport au temps.

Le principe fondamental de la dynamique pour un solide rigide s'écrit :

$$\sum \underline{\underline{F}}_{ext} = \underline{\underline{m}} \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} + [\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{mv}}]$$

où le crochet de Lie  $[\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{Mv}}]$ <sup>(36)</sup> décrit les moments des forces de Coriolis et les couples gyroscopiques ;  $\underline{\underline{v}}$  est le vecteur vitesse de dimension  $(6 \times 1)$  ,  $\underline{\underline{F}}_{ext}$  est le vecteur des efforts globaux appliqués au solide<sup>(37)</sup> et  $\underline{\underline{M}}$  est une matrice de “masse”<sup>(38)</sup> de dimension  $(6 \times 6)$ .

Dans l'hypothèse où le déplacement total du solide  $S_i$  représentant le plancher  $i$  s'exprime comme la somme du déplacement propre par rapport au sol et du déplacement du sol  $\underline{\underline{u}}_g(t)$ , on obtient pour un modèle de  $N$  étages,  $N$  équations hexadimensionnelles qui peuvent se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\underline{\underline{M}} \frac{d^2 \underline{\underline{X}}}{dt^2} + \left[ \frac{d\underline{\underline{X}}}{dt}, \underline{\underline{M}} \frac{d\underline{\underline{X}}}{dt} \right] + \underline{\underline{C}} \frac{d\underline{\underline{X}}}{dt} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{X}} = -\underline{\underline{M}} \widetilde{\underline{\underline{u}}}_g$$

<sup>33</sup>Jean-Pierre Touret 1989, Modélisation des bâtiments dissymétriques Actes du Colloque AFPS “ Génie parasismique et aspects vibratoires dans le génie civil, Tome I.

<sup>34</sup>Ce contrat a permis l'embauche sur 15 mois d'un ingénieur de recherche (I. Alamé) pour travailler sur “le mouvement de torsion dans les bâtiments soumis aux séismes” (cf rapports du contrat EDF/LCPC/CNRS).

<sup>35</sup>Un groupe de Lie est un groupe muni d'une structure différentielle compatible avec la loi de composition interne de deux applications.

<sup>36</sup>Le crochet de Lie  $[x, y]$  de deux champs  $x$  et  $y$  qui ont pour vecteur invariant respectivement  $\omega_x$  et  $\omega_y$ , est défini par :  $[x, y] = \omega_x \wedge y - \omega_y \wedge x$ .

<sup>37</sup>Ce vecteur comprend les composantes des forces et des moments de ces forces dans les trois directions.

<sup>38</sup>Dans cette modélisation, la matrice de “masse” d'un corps rigide regroupe dans une même matrice, la masse, le tenseur d'inertie et centre d'inertie du corps.

numéro du mode	Nature du mode	Fréquence BSR (Hz)	Fréquence CASTEM (Hz)
1	1er mode de flexion en y	17.63	15.82
2	1er mode de flexion en x	28.20	23.49
3	Mode couplé flexion en x, flexion en y, torsion autour de z	28.20	23.49
4	2e mode de flexion en y	47.16	44.46

**Tab. 4.3** Fréquences propres pour le bâtiment obtenues pour les deux modélisations BSR et CASTEM2000

où  $\underline{X}$  est un vecteur  $6N \times 1$  formé des déplacements  $X_{i(i \in [1, N])}$  des  $N$  planchers.  $\underline{K}$  et  $\underline{C}$  sont respectivement les matrices de rigidité et d'amortissement visqueux de dimension . Chaque  $X_i$  comprend trois translations respectivement  $u_x^i$ ,  $u_y^i$  et  $u_z^i$  ainsi que trois rotations  $\omega_x^i$ ,  $\omega_y^i$  et  $\omega_z^i$  regroupées sous la forme suivante :  $X_i = {}^t(u_x^i, u_y^i, \omega_z^i, u_z^i, \omega_x^i, \omega_y^i)$  afin d'obtenir des matrices de masse et de rigidité symétriques.  $\underline{\ddot{u}}_g$  désigne le vecteur  $6N \times 1$  égale à :  ${}^t({}^t\underline{\ddot{u}}_g, {}^t\underline{\ddot{u}}_g, \dots, {}^t\underline{\ddot{u}}_g)$  où  $\underline{\ddot{u}}_g$  est l'accélération au niveau du sol de dimension  $(6 \times 1)$ . L'expression des matrices  $\underline{M}$  et  $\underline{K}$  est donnée dans l'article [CONF21].

Pendant 1995, les équations du modèle du comportement dynamique d'un bâtiment par matrices de transfert, utilisant le formalisme des groupes de Lie, ont été entièrement revues et reformulées avec la possibilité d'introduire de forces d'excitation à la base du bâtiment (en particulier des forces d'origine sismique).

Des tests numériques sur des cas simples de bâtiments mettant en évidence des effets dûs à la torsion ont été menés. En particulier, un bâtiment de forme rectangulaire, constitué de quatre planchers identiques, de voiles périphériques, d'un voile central et suivant les étages de voiles secondaires proposé par EDF a été modélisé. Les épaisseurs des voiles et des planchers sont celles habituellement rencontrées dans les centrales nucléaires. Les fréquences propres du modèle BSR pour ce bâtiment sont données dans le tableau suivant 4.3 où elles sont comparées à celles obtenues par le code de calcul Eléments Finis CASTEM 2000.

Les fréquences pour la modélisation BSR varient d'environ 17 Hz à 311 Hz. Elles sont très élevées mais elles correspondent à ce type de bâtiment très raide. L'étape suivante a été de rechercher la réponse du modèle BSR à un séisme particulier (par exemple le séisme de Morgan Hill en 1984). On dispose de l'enregistrement numérisé en accélération et en vitesse à la base du bâtiment. La méthode numérique utilisée (Runge-Kutta) pour résoudre les équations différentielles a nécessité des pas de temps très "petits" ( $\leq 10^{-6}$ ). Les fréquences correspondant aux modes verticaux sont très largement supérieures aux autres fréquences ; ce qui explique que les modèles par matrices de transfert se contentent généralement de trois degrés de liberté, ne faisant pas apparaître ce mode de traction-compression, peu excité en général, par un séisme. Une autre explication envisagée serait que l'on se heurte à la résolution d'équations différentielles raides<sup>(39)</sup> qui provoquent des instabilités numériques pour les méthodes explicites comme la méthode de Runge-Kutta. On propose de résoudre ces équations par une méthode de prédiction-correction : la prédiction se faisant par une méthode explicite d'Adams-Bashforth qui est fortement stable et la correction par une méthode implicite d'Adams-Moulton, fortement stable.

Une autre direction a été de modéliser l'interaction sol-fondation. La technique utilisée a été la méthode classique des impédances, c'est-à-dire des raideurs et des amortisseurs de sol. Plusieurs types de sols ont été envisagés : l'argile, le sable et le granit. L'analyse du modèle BSR avec l'interaction sol-fondation pour un milieu semi-infini homogène contribue comme l'on s'y attend, à diminuer les fréquences. De plus la forme des modes est modifiée. Les effets de torsion et de roulis sont augmentés lors de la prise en compte de l'interaction sol-fondation.

#### *Production réalisée*

- 3 rapports de contrat EDF (I et II) 1992 et (III) 1993.
- 1 rapport de DEA de Karine Cheval 1995.
- 1 rapport de stage d'option (Ecole Polytechnique) de Nirina Ramambasoa 1996.
- 3 publications dans colloque avec actes dont :
  - 1 au congrès international StruCoMe, Paris, 1992 [CONF15]
  - 1 au 3ème colloque de génie parasismique, St Rémi-les-Chevresuses, 1993, [CONF17]
  - 1 à 10th European conference on earthquake engineering, Vienne, 1994, [CONF21]

<sup>39</sup> Les équations différentielles raides sont des équations qui contiennent simultanément des valeurs propres de taille très différentes. Elles représentent à la fois des mouvements lents et des mouvements rapides

## B.4 Les spectres de réponse et le coefficient de comportement

La création de codes parasismiques européens (EUROCODE 8) et le souci actuel de reformulation des codes nationaux (anciennement Règles parasismiques AFPS 69) m'ont conduit à m'interroger sur des notions propres au génie parasismique à savoir le coefficient de ductilité, les spectres de réponse élastique et inélastique et enfin le coefficient de comportement. Ces notions permettent le dimensionnement des structures. En général, ce dimensionnement est calculé à partir d'une réponse purement élastique du bâtiment soumis à un séisme d'intensité connue. Dans la pratique, ces normes s'avèrent suffisantes pour assurer la sécurité des bâtiments et des ouvrages d'art, mais ne rendent pas compte de la réalité. On a pu remarquer, en effet, que la plupart des structures dimensionnées à partir des codes de calcul parasismique linéaire subissaient des dommages beaucoup moins importants que ceux prévus par les codes. Ceci s'explique par l'existence de phénomènes non linéaires lors du mécanisme d'absorption de l'énergie fournie par le sol à la structure durant le séisme. En effet, l'apparition de déformations inélastiques nécessite le stockage d'une énergie très importante au sein de la structure. La structure du génie civil est donc en mesure d'absorber davantage d'énergie lorsqu'elle ne répond plus de manière élastique à la secousse sismique. La prise en compte des phénomènes non linéaires, dans la réponse d'une structure soumise à un séisme, doit permettre d'élaborer une nouvelle réglementation moins stricte, pour le dimensionnement des ouvrages du génie civil. Je me suis donc intéressé à la dissipation d'énergie ; plus précisément à la modélisation des effets hystérétiques et d'endommagement dans le comportement dynamique à l'échelle de la structure totale (taille réelle du bâtiment) et non à l'échelle du matériau (taille d'une éprouvette) et à l'étude de leurs effets sur les spectres de réponse et sur le coefficient de comportement.

La définition des notions précédemment citées est souvent floue ou imprécise.

La *ductilité* au sens mécanique du terme est utilisée sous sa forme d'adjectif *ductile* et permet de qualifier un phénomène de rupture locale. On parle de *rupture ductile* mettant en jeu de grandes déformations plastiques locales par opposition à la rupture fragile par clivage. Ainsi un élément présentant un comportement ductile est capable de montrer sous charge à peu près constante des déformations excédant largement la limite élastique et de contribuer par le fait, activement à la dissipation d'énergie.

Par extension, il est donné en génie parasismique deux définitions de la ductilité : une locale et une d'ensemble qui dépendent de la variable choisie pour représenter le phénomène. La mesure communément admise de la *ductilité locale*  $\mu$  est le rapport de la déformation à l'état ultime  $d_{max}$  à la déformation élastique maximale  $d_{lim}^e$  :

$$\mu = \frac{d_{max}}{d_{lim}^e}$$

La demande de ductilité locale au niveau d'une rotule plastique peut se définir comme ci-dessus à l'aide de la courbure  $\phi$  ou rotation par unité de longueur dans la section :

$$\mu = \frac{\phi_{max}}{\phi_{lim}^e}$$

où  $\phi_{max}$  est la courbure maximum et  $\phi_{lim}^e$  la courbure dans la section au premier déplacement limite.

La *ductilité d'ensemble* dépend naturellement des ductilités locales mais la relation n'est facile à établir que pour des cas simples. Si la structure possède des assemblages, ceux-ci peuvent être moins ductiles que la partie courante de la structure.

Le *spectre de réponse élastique* à un séisme  $\ddot{u}_g(t)$  donné, représente l'ensemble des valeurs maximales en valeur absolue du déplacement relatif ou de la vitesse relative ou de l'accélération absolue d'un oscillateur soumis à ce séisme en fonction de la fréquence propre  $\omega$  de l'oscillateur, pour un taux d'amortissement  $\xi$  donné. Le déplacement maximal d'un oscillateur visqueux linéaire s'exprime à l'aide de l'intégrale de Duhamel par :

$$S_d(\omega) = \max_{t \in [t_0, t_f]} \left\{ \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^{t_f} \ddot{u}_g \exp^{-\xi \omega (t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau \right\}$$

où  $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$  est la pseudo-pulsation propre.

Généralement, on définit une pseudo-vitesse spectrale et une pseudo-accélération spectrale respectivement par :

$$PS_v = \omega S_d \quad PS_a = \omega^2 S_d \quad (4.5)$$

Les formules précédentes (4.5) sont vraies pour la vitesse spectrale  $S_v$  et l'accélération spectrale  $S_a$  dans le cas où le système est non dissipatif (sans amortissement).

Une étude statistique de spectres de réponse amortis, pour un grand nombre de séismes possibles, permet de

définir un *spectre moyen* au sens de la théorie probabiliste de la sécurité. Chaque ordonnée présente alors une certaine probabilité<sup>(40)</sup> d'être dépassée lors d'une réalisation future de l'intensité considérée.

Pour une structure à plusieurs degrés de liberté, l'hypothèse du comportement linéaire de la structure, en particulier le théorème de superposition modale permet d'utiliser la notion de spectre de réponse en calculant la somme des valeurs maximales absolues obtenues pour chacun des  $n$  modes propres retenus de la structure :

$$S_d^{stru} = \sum_{i=1}^n S_{d_i}$$

Cette somme conduit toujours à une estimation par excès de la réponse maximale de la structure car les réponses maximales des différents modes ne se manifestent généralement pas au même instant, ni avec le même signe. Ce qui assure toujours la sécurité de l'ouvrage.

Le *spectre de réponse élasto-plastique* en déplacement est défini par rapport au déplacement élastique maximum  $d_{lim}^{elas}$  et non par rapport au déplacement total d'un oscillateur élasto-plastique parfait dont le taux d'amortissement critique et la ductilité sont a priori fixés. On obtient :

$$S_d = d_{lim}^{elas}$$

Les pseudo-valeurs spectrales conservent leur définition précédente, donnée dans le cas du comportement purement élastique (cf relation 4.5).

Le *coefficient de comportement* noté  $q$  dans les codes européens et  $R_w$  dans le code californien (reduction factor), permet de passer d'un spectre de réponse élastique à un spectre de réponse inélastique. Il est perçu comme un coefficient qui regroupe dans un seul nombre, les effets de plusieurs phénomènes complexes. Il reste néanmoins nécessaire pour un meilleur dimensionnement des structures aux séismes. L'étude du comportement d'un oscillateur élasto-plastique pour des pulsations propres "très" petites ou "très" grandes et l'utilisation de l'hypothèse de l'égalité des énergies dans le cas de pulsations propres moyennes nous amènent au passage d'un spectre moyen élastique à un spectre moyen élasto-plastique.

Le but du travail effectué entre 1994 et 1995 a été de mettre au point deux algorithmes. Le premier permet l'obtention de spectres de réponse élastique et le second l'obtention de spectres de réponse élasto-plastique parfait pour une classe de bâtiments ayant un coefficient de ductilité constant. La difficulté réside dans le fait que la grandeur attachée à la structure est le coefficient de ductilité et non la limite d'élasticité. Une étude itérative est donc nécessaire pour trouver la valeur des paramètres  $d_{lin}^e$  et  $d_{max}$  compatibles vis à vis du séisme étudié avec la ductilité  $\mu$  retenue. Le schéma d'itération à l'étape  $n$  est le suivant :

pour  $n=1$ , après un calcul élastique :

$$\begin{aligned} \{d_{lin}^e\}_1 &= \frac{d_{max}^e}{\mu} \\ \mu_1 &= \frac{\{d_{max}\}_1}{\{d_{lin}^e\}_1} \end{aligned}$$

et pour  $n \geq 2$  après un calcul élasto-plastique parfait avec la valeur  $\{d_{lin}^e\}_{n-1}$  précédemment calculée :

$$\begin{aligned} \{d_{lin}^e\}_n &= \frac{\{d_{max}\}_{n-1}}{\mu} \\ \mu_n &= \frac{\{d_{max}\}_n}{\{d_{lin}^e\}_n} \end{aligned}$$

Le test d'arrêt est sur la valeur de  $\mu_n$  :

$$\|\mu - \mu_n\| \leq \epsilon$$

Nous avons montré par récurrence et à l'aide du critère de l'égalité des énergies emmagasinées que les sous-suites extraites  $\mu_{2n}$  et  $\mu_{2n-1}$  sont convergentes. Cependant, nous n'avons trouvé aucune raison pour que les valeurs d'adhérence soient identiques (ce qui est d'ailleurs le cas pour des pulsations de très faibles valeurs). La suite des limites d'élasticité semble cependant converger. En associant un test sur le déplacement limite élastique avec un test sur la ductilité, on peut sortir de l'itération et obtenir une valeur pour le déplacement spectral même pour des pulsations propres critiques très faibles.

<sup>40</sup> dans l'hypothèse d'une distribution normale, la probabilité de non-dépassement est fixée à 84%.

Nous sommes donc capables de tracer, pour un séisme donné, le spectre de réponse élastique pour un taux d'amortissement donné ainsi que le spectre de réponse élasto-plastique parfait pour un taux d'amortissement donné et pour une ductilité donnée.

L'étape suivante serait de voir comment la dissipation d'énergie (d'une façon plus générale que dans le cas élasto-plastique parfait) se traduit sur le tracé des spectres de réponse. Une idée serait d'utiliser le modèle d'hystérésis développé par Bouc et présenté précédemment. Nous rappelons les équations du mouvement pour un oscillateur avec un modèle de Bouc :

$$\ddot{u} + f(u, \dot{u}) = F(t) \quad \text{avec} \quad f(u, \dot{u}) = c\dot{u} + ku + z$$

$$\dot{z} = \alpha\dot{u} - \beta|\dot{u}|z|z|^{n-1} - \mu\dot{u}|z|^n \quad (4.6)$$

où  $\{\alpha, \beta, \mu\} \in \mathbb{R}^3, n \geq 1$ .

On pourrait aussi étudier l'effet de l'endommagement sur les spectres de réponse.

#### *Production réalisée*

- 1 rapport de DEA de Jacques Réberol, 1994.
- 1 rapport de travail de fin d'études (Ecole Polytechnique), Xavier Martiré, 1995<sup>(41)</sup>.
- 1 article dans Bauingenieur 68, 1993 [ARTI4].
- 1 publication dans colloque avec actes :
  - 1 au 3ème colloque national de génie parasismique, St Rémi-les-Chevres, 1993 [CONF18].

## **B.5 Interaction site-ville et aléa sismique en milieu urbain**

Qui dit catastrophe dit concentration humaine, et l'urbanisation de vastes étendues a un effet en retour sur les processus physiques. L'influence du bâti, des routes, etc. sur les processus implique que l'on ne peut extrapoler les résultats en champ libre à des zones urbaines. Comme on assiste à une concentration croissante de la population mondiale dans de grands centres urbains, avec des immeubles de plus en plus hauts, construits le plus souvent en site alluvial (Tokyo, Los Angeles, Mexico, Bogota, etc), on peut s'interroger sur la pertinence de l'hypothèse du champ libre pour le calcul des mouvements sismiques. La destruction d'anciens bâtiments ou quartiers, ou la construction de nouveaux, peuvent-elles modifier localement les caractéristiques des mouvements sismiques ? Si la réponse à cette question est positive, ne serait-ce que dans quelques configurations géologiques particulières, cela risque de changer radicalement la façon d'aborder les problèmes de risque sismique, où l'on a l'habitude de séparer complètement aléa d'un côté et vulnérabilité de l'autre. La compréhension de l'interaction 'ville-processus' devient alors un pré-requis d'une analyse quantitative de la vulnérabilité.

Sous l'impulsion de Pierre-Yves Bard personnel du LCPC au LGIT de Grenoble, un programme de recherches<sup>(42)</sup> a démarré qui vise à étudier et quantifier les interactions vibratoires entre bâtiments à l'intérieur des villes par l'intermédiaire du sol dans le but de l'évaluation des risques sismiques auxquels sont exposés les bâtiments.

Une étude s'inscrivant dans ce programme a été réalisée récemment en collaboration avec Jean-Louis Chazelas du LCPC de Nantes. Jusqu'à présent, la sollicitation de calcul appliquée aux structures est celle dite "en champ libre", c'est à dire celle correspondant à ce que subirait l'ouvrage en l'absence de tout environnement urbain. Certains constats de terrain font penser qu'il conviendrait de prendre en compte - en aggravation ou en minoration - l'énergie vibratoire induite par le séisme sur les constructions existantes dans l'environnement immédiat et qu'elle rétro-diffusent via le sol.

L'une des voies expérimentales de mise en évidence de ce phénomène a consisté à réaliser une série d'essais en modèle réduit centrifugé sur la centrifugeuse du LCPC de Nantes. Un bâtiment à échelle réduite (1/100) est sollicité par un choc à 100g et on enregistre le comportement vibratoire d'un autre bâtiment de mêmes dimensions, placé une distance et dans une position relative qu'on peut faire varier afin d'évaluer l'incidence des différentes configurations spatiales. Cela a fait l'objet d'un stage de DEA de Ali Alshaer (2002) qui a compris le phénomène étudié et les essais en modèle réduit centrifugé (dont les problèmes de similitude). Nous avons traité les données issues de ces expérimentations à l'aide de la TOC afin de dégager les paramètres du comportement de chaque bâtiment. Ce stage comportera des travaux de traitement du signal et d'analyse cinématique. Ce travail devrait faire l'objet d'une publication.

#### *Production réalisée*

<sup>41</sup>Xavier Martiré a obtenu les félicitations dans le département Mécanique pour son travail de stage lors de la cérémonie de remise des prix d'option à la promotion 1992.

<sup>42</sup>Le programme de recherches correspond à une action concertée incitative du Ministère de la Recherche ACI-CATNAT : "Prévention des catastrophes naturelles". 2001-2003

Thème : Interaction 'site-ville' et aléa sismique en milieu urbain (coordinateur du projet : P.Y. Bard, LCPC/Univ. Grenoble).

## C Dynamique des véhicules léger et lourds

### C.1 Modélisation du mouvement vertical d'un véhicule léger

Cette étude menée entre 1992 et 1994 s'inscrivait dans le cadre d'une recherche plus vaste au LCPC sur les effets de l'uni des chaussées<sup>(43)</sup>. Le travail demandé était l'obtention d'un modèle de véhicule (avec éventuellement la modélisation du moteur) pouvant rendre compte des effets de pompage, roulis et tangage de la caisse et permettant une caractérisation fine du fonctionnement de chaque élément de la suspension. En particulier, il devait être capable de reproduire "correctement" les réponses verticales du véhicule à l'uni de la chaussée et à terme les effets de l'uni sur le conducteur.

On a recherché d'abord des modèles de comportement formés de masses et d'éléments rhéologiques classiques (ressorts, dash-pots et patins) et d'éléments non linéaires plus complexes en série ou en parallèle (cf chapitre précédent). L'étape suivante est l'estimation des paramètres du modèle retenu à partir d'essais appropriés ou d'essais mécaniques "classiques".

Un premier modèle linéaire 2D simplifié formé de masses, de ressorts et de dash-pots a été testé sur des cas de signaux numériques<sup>(44)</sup>. La collaboration avec Renault (contrat Renault-LCPC) a permis ensuite d'obtenir et d'utiliser<sup>(45)</sup> en 1994 le logiciel "DYVA" version 2.0<sup>(46)</sup> qui modélise les éléments participant aux vibrations verticales d'un véhicule léger : (1) les quatre roues-pneumatiques - avec un DDL par roue (déplacement vertical) (2) les suspensions roue-caisse (passives ou pilotées) (3) la caisse avec trois DDL (déplacement vertical + deux angles : roulis et tangage) (4) le groupe moteur-propulseur avec trois DDL (déplacement vertical + deux angles : roulis et tangage) et (5) les tampons moteur en caoutchouc ou hydroélastiques. On obtient un modèle 3D à 10 degrés de liberté. Le comportement 1D d'une roue-pneumatique en contact avec le sol a été représenté par un oscillateur formé d'une masse montée sur un modèle de Poynting-Thompson<sup>(47)</sup> avec au total quatre paramètres. Les suspensions entre la roue et la caisse (cas d'une attache non porteuse) ont été modélisées par un modèle de Schwedoff<sup>(48)</sup> avec au total 4 paramètres. La caisse et le groupe moto-propulseur ont été modélisés chacun par une solide indéformable dont on identifie les caractéristiques de masse et moments d'inertie (composantes de roulis et de tangage).

Ensuite, les quatre paramètres du modèle de roue ont été identifiés à partir de mesures faites sur l'ensemble (jante+voile+pneumatique) en fonction de la fréquence d'excitation (plage de fréquence de 0 à 5 Hz). La méthode d'estimation utilisée est la technique habituelle des moindres carrés. L'identification du modèle des suspensions fait appel à des mesures communément effectués dans les bureaux d'étude. Avec ce modèle de véhicule (R21) identifié sur banc d'essais chez Renault, le travail suivant était de comparer les mesures réelles<sup>(49)</sup> en accélération avec celles obtenues par le modèle identifié. Six profils de route avec différentes qualité d'uni<sup>(50)</sup> ont été étudiés et les résultats sont présentés dans le rapport de contrat LCPC-RENAULT rédigé avec L. Lelu (1994)<sup>(51)</sup>. La première configuration du modèle testée est linéaire<sup>(52)</sup> sans l'ajout du groupe moto-propulseur. La comparaison entre les accélérations temporelles obtenues par les essais et celles obtenues par le modèle, montrent un décalage manifeste lié à une mauvaise connaissance de la vitesse du véhicule. En effet, la vitesse supposée constante dans la modélisation ne l'est pas durant l'essai et de plus, sa mesure au compteur kilométrique est très approximative. Le recalage de la vitesse est alors effectué pour obtenir un bon accord au voisinage des maxima des accélérations au niveau des roues provenant des essais et celles du modèle. Ce recalage est très difficile à réaliser pour un profil de route de mauvaise qualité. L'allure des courbes temporelles mesurées et calculées est assez semblable pour les routes de bonne qualité. Pourtant on note pour les oscillations de faible amplitude, que la réponse du

<sup>43</sup>Le but final souhaité dans le thème CH-07 1992-1994 : "Effets de l'uni des chaussées" est une classification de l'uni des différentes chaussées suivant les critères de confort, de sécurité et de coût à l'utilisateur.

<sup>44</sup>travail effectué dans le cadre du stage de DEA de A-J. Khelalfa (1992).

<sup>45</sup>en boîte noire, uniquement.

<sup>46</sup>Le logiciel DYNA (ex CONFORT) est développé et validé par Renault au sein du service Etudes Avancées - Liaison au Sol. La version 3.0 devrait intégrer la modélisation du siège+passager.

<sup>47</sup>Le modèle de Poynting-Thompson est formé d'un modèle de Maxwell en parallèle avec un ressort.

<sup>48</sup>Le modèle de Schwedoff est formé d'un modèle de Maxwell en parallèle avec un patin et un ressort.

<sup>49</sup>Les mesures ont été effectuées sur site par le LCPC de Nantes. Plusieurs accélérogrammes ont été relevés sur la R21 en circulation : (1) au niveau des quatre roues, (2) au niveau du point chapelle avant droit et (3) au niveau du cric droit.

<sup>50</sup>La qualification de l'uni de la chaussée est généralement faite à l'aide de la procédure NBO qui attribue une note entre 0 et 10 à l'uni de la chaussée pour chaque bande d'ondes (petites ondes (0.7 à 2.8 m), moyennes ondes (2.8 à 11.2 m) et grandes ondes (11.2 à 44.8 m)).

<sup>51</sup>L. Lelu a été embauché pendant 4 mois grâce au contrat LCPC-Renault.

<sup>52</sup>le modèle des suspensions n'a pas de contribution due au patin.



modèle au niveau des roues a une amplitude supérieure à celle du signal mesuré et inversement au niveau de la caisse. Le raidissement des suspensions avec l'ajout de patins améliore légèrement les résultats. De plus, si on rajoute le modèle du groupe moto-propulseur, le tracé dans le domaine fréquentiel de la densité spectrale de puissance<sup>(53)</sup> pour le signal mesuré sur les dix premières secondes indique une meilleure concordance entre la courbe obtenue à partir des données expérimentales et celle obtenue par le modèle<sup>(54)</sup>.

#### *Production réalisée*

- 1 rapport de stage de DEA de Laurent Lelu, 1993.
- 1 rapport de contrat (Renault-LCPC) 1994 [RAPP5].

## C.2 Identification des paramètres d'un véhicule et de l'état de l'ouvrage par filtrage

On s'intéresse ici à la problématique de l'identification par filtrage : étant une réponse échantillonnée et bruitée provenant d'un système mécanique réel, peut-on retrouver l'état et des paramètres du modèle théorique associé au système réel ? Un tel procédé est fondé sur la minimisation de la variance des échantillons de mesures. Parmi les méthodes optimales de traitement du signal, basées sur les caractéristiques statistiques du second ordre, on peut citer l'identification par filtrage optimal de Wiener<sup>(55)</sup> et de Kalman<sup>(56)</sup>. Le filtre de Wiener comme celui de Kalman sont des filtres statistiques car ils s'appuient sur les propriétés aléatoires des signaux. Le principe de base du filtre de Wiener est la minimisation de l'écart quadratique moyen, en supposant a priori que le signal traité est corrélé avec l'entrée du filtre. Ce traitement ne s'applique qu'en environnement stationnaire. Le filtrage de Wiener est bien adapté pour la soustraction de bruit.

### Présentation du filtre de Kalman.

Le filtre de Kalman est une technique d'estimation stochastique de l'état d'un système dynamique à partir de ses réponses échantillonnées et bruitées. D'abord conçue pour traiter les systèmes linéaires, cette technique a fait l'objet de plusieurs extensions ; citons dans les années 80, sa généralisation aux représentations d'état non linéaires.

On suppose que la forme de la représentation d'état régissant la réponse d'un système dynamique est connue<sup>(57)</sup>. On dispose d'un échantillonnage dans le temps, de mesures d'observation bruitées  $\underline{U}_k$  et de mesures de la force d'excitation :  $\underline{F}_k = \underline{F}(t_k)$  à l'instant  $t_k$ . Les variables d'état sont regroupées dans le vecteur d'état :  $\underline{X}_k = \underline{X}(t_k)$  à l'instant  $t_k$ . On présente le principe du filtrage dans le cas d'une représentation d'état linéaire. La forme générale des équations de la représentation d'état est :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{X}}(t) &= \underline{A}(t) \underline{X}(t) + \underline{B}(t) \underline{F}(t) + \underline{\Gamma}(t) \underline{\xi}(t) && \text{équation d'état} \\ \underline{U}(t) &= \underline{C}(t) \underline{X}(t) + \underline{D}(t) \underline{F}(t) + \underline{W}(t) && \text{équation d'observation}\end{aligned}$$

où  $\underline{A}(t)$ ,  $\underline{B}(t)$ ,  $\underline{C}(t)$  et  $\underline{D}(t)$  sont des matrices qui peuvent dépendre du temps.  $\underline{\xi}(t)$  et  $\underline{W}(t)$  sont des vecteurs aléatoires ; on suppose qu'ils sont du type bruit blanc gaussien de moyenne nulle à l'instant  $t$  <sup>(58)</sup>. Comme l'entrée déterministe  $\underline{F}(t)$  et les séquences bruitées  $\underline{\xi}(t)$  et  $\underline{W}(t)$  sont présentes, le système est quelquefois appelé un

<sup>53</sup>La densité spectrale de puissance d'un signal est la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du signal.

<sup>54</sup>concordance manifeste au voisinage de 14Hz où l'effet du groupe moto-propulseur se fait particulièrement ressentir.

<sup>55</sup>On peut situer l'origine du filtrage optimal avec les premiers travaux de Wiener en 1942, utilisant la méthode des moindres carrés et concernant l'estimation linéaire.

<sup>56</sup>Le filtre de Kalman, exposé en 1960, fut présenté comme une alternative au filtre de Wiener. Il développe une approche stochastique et permet d'estimer de façon récursive, conjointement, l'état et les paramètres d'un système. Il fut d'abord appliqué aux systèmes linéaires ; puis des améliorations aux travaux de Kalman permirent son adaptation pour les systèmes non linéaires.

<sup>57</sup>La représentation d'état pour un système linéaire s'écrit (cf. relation \*\* du chapitre )

$$\dot{\underline{X}}(t) = a(\underline{X}, t) + b(\underline{F}(t), t)$$

à laquelle, on ajoute la relation d'observation qui relie l'état  $\underline{X}$  et la sortie  $\underline{u}(t)$  :

$$\underline{u}(t) = \mathcal{G}[\underline{X}(t), \underline{F}(t), t]$$

<sup>58</sup>Les propriétés statistiques des séquences de bruit sont respectivement pour  $\underline{W}(t)$  :  $E[\underline{W}_k] = E[\underline{W}(t_k)] = 0$  ;  $E[\underline{W}_k \underline{W}_j^T] = \delta_j^k \underline{R}_k$

et pour le bruit  $\underline{\xi}(t)$  :  $E[\underline{\xi}_k] = E[\underline{\xi}(t_k)] = 0$  ;  $E[\underline{\xi}_j \underline{\xi}_k^T] = \delta_j^k \underline{Q}_k$

où  $E[.]$  désigne l'espérance conditionnelle et  $\underline{R}_k$  et  $\underline{Q}_k$  sont respectivement les matrices de covariance du bruit de mesure  $\underline{W}(t)$  et  $\underline{\xi}(t)$ .



système linéaire déterministe/stochastique. Ce système peut être décomposé en la somme d'un système linéaire déterministe :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{Z}}}(t) &= \underline{\mathbf{A}}(t) \underline{\mathbf{Z}}(t) + \underline{\mathbf{B}}(t) \underline{\mathbf{F}}(t) \\ \underline{\mathbf{S}}(t) &= \underline{\mathbf{C}}(t) \underline{\mathbf{Z}}(t) + \underline{\mathbf{D}}(t) \underline{\mathbf{F}}(t)\end{aligned}\quad (4.7)$$

et d'un système linéaire purement stochastique :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{Y}}}(t) &= \underline{\mathbf{A}}(t) \underline{\mathbf{Y}}(t) + \underline{\mathbf{\Gamma}}(t) \underline{\mathbf{\xi}}(t) \\ \underline{\mathbf{V}}(t) &= \underline{\mathbf{C}}(t) \underline{\mathbf{Y}}(t) + \underline{\mathbf{W}}(t)\end{aligned}\quad (4.8)$$

avec  $\underline{\mathbf{X}}(t) = \underline{\mathbf{Z}}(t) + \underline{\mathbf{Y}}(t)$  et  $\underline{\mathbf{U}}(t) = \underline{\mathbf{S}}(t) + \underline{\mathbf{V}}(t)$ . Les équations différentielles d'état <sup>(59)</sup> et les équations d'observation pour les deux systèmes précédemment définis (4.7) et (4.8) peuvent être ensuite discrétisées (pas d'échantillonnage régulier  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ). On obtient alors pour le système déterministe :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{Z}}_{k+1} &= \underline{\mathbf{\Phi}}_k \underline{\mathbf{Z}}_k + \underline{\mathbf{B}}_k \underline{\mathbf{F}}_k \\ \underline{\mathbf{S}}_k &= \underline{\mathbf{C}}_k \underline{\mathbf{Z}}_k + \underline{\mathbf{D}}_k \underline{\mathbf{F}}_k\end{aligned}\quad (4.9)$$

où  $\underline{\mathbf{Z}}_{k+1} = \underline{\mathbf{Z}}(t_{k+1})$ ,  $\underline{\mathbf{F}}_k = \underline{\mathbf{F}}(t_k)$  et  $\underline{\mathbf{S}}_k = \underline{\mathbf{S}}(t_k)$ . Les matrices  $\underline{\mathbf{\Phi}}_k$ ,  $\underline{\mathbf{B}}_k$ ,  $\underline{\mathbf{C}}_k$  et  $\underline{\mathbf{D}}_k$  sont constantes ; on a directement pour un schéma à l'ordre 1 :  $\underline{\mathbf{B}}_k = \Delta t \underline{\mathbf{B}}(t_k)$ ,  $\underline{\mathbf{C}}_k = \underline{\mathbf{C}}(t_k)$  et  $\underline{\mathbf{D}}_k = \underline{\mathbf{D}}(t_k)$ , pour  $\underline{\mathbf{\Phi}}_k$  appelée matrice de transition du système, son écriture dépend du schéma d'approximation de dérivation choisi <sup>(60)</sup>. On obtient ensuite pour le système stochastique :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{Y}}_{k+1} &= \underline{\mathbf{\Phi}}_k \underline{\mathbf{Y}}_k + \underline{\mathbf{\Gamma}}_k \underline{\mathbf{\xi}}_k \\ \underline{\mathbf{V}}_k &= \underline{\mathbf{C}}_k \underline{\mathbf{Y}}_k + \underline{\mathbf{W}}_k\end{aligned}\quad (4.10)$$

où  $\underline{\mathbf{Y}}_{k+1} = \underline{\mathbf{Y}}(t_{k+1})$ ,  $\underline{\mathbf{Y}}_k = \underline{\mathbf{Y}}(t_k)$ ,  $\underline{\mathbf{\xi}}_k = \underline{\mathbf{\xi}}(t_k)$ ,  $\underline{\mathbf{V}}_k = \underline{\mathbf{V}}(t_k)$  et  $\underline{\mathbf{W}}_k = \underline{\mathbf{W}}(t_k)$ . Les matrices  $\underline{\mathbf{\Phi}}_k$ ,  $\underline{\mathbf{\Gamma}}_k$ ,  $\underline{\mathbf{C}}_k$  sont constantes ; on a directement pour un schéma à l'ordre 1 :  $\underline{\mathbf{\Gamma}}_k = \Delta t \underline{\mathbf{\Gamma}}(t_k)$ ,  $\underline{\mathbf{C}}_k = \underline{\mathbf{C}}(t_k)$  et  $\underline{\mathbf{D}}_k = \underline{\mathbf{D}}(t_k)$ ,  $\underline{\mathbf{\Phi}}_k$  est défini comme précédemment suivant le schéma d'approximation retenu. Finalement, pour le problème global discrétisé<sup>(61)</sup>, on obtient :  $\underline{\mathbf{X}}_k = \underline{\mathbf{X}}(t_k) = \underline{\mathbf{Z}}_k + \underline{\mathbf{Y}}_k$  et  $\underline{\mathbf{U}}_k = \underline{\mathbf{U}}(t_k) = \underline{\mathbf{S}}_k + \underline{\mathbf{V}}_k$ . L'avantage de cette représentation est que la solution  $\underline{\mathbf{Z}}_k$  du système linéaire déterministe est donnée par l'équation de transition :

$$\underline{\mathbf{Z}}_k = \left( \underline{\mathbf{\Phi}}_{k-1} \cdots \underline{\mathbf{\Phi}}_0 \right) \underline{\mathbf{Z}}_0 + \sum_{i=1}^k \left( \underline{\mathbf{\Phi}}_{k-1} \cdots \underline{\mathbf{\Phi}}_{i-1} \right) \underline{\mathbf{B}}_{i-1} \underline{\mathbf{F}}_{i-1}$$

La recherche de l'estimation optimale de  $\widetilde{\underline{\mathbf{X}}}_k$  de  $\underline{\mathbf{X}}_k$  se ramène alors à celle de  $\widetilde{\underline{\mathbf{Y}}}_k$  de  $\underline{\mathbf{Y}}_k$  dans la représentation d'état stochastique. Cette estimation  $\widetilde{\underline{\mathbf{Y}}}_k$  va évidemment dépendre de l'information statistique contenue dans les séquences de bruit. Les séquences de bruit  $\underline{\mathbf{\xi}}_k$  et  $\underline{\mathbf{W}}_k$  sont supposées indépendantes<sup>(62)</sup>. L'état initial :  $\underline{\mathbf{Y}}_0$  est aussi supposé indépendant de  $\underline{\mathbf{\xi}}_k$  et de  $\underline{\mathbf{W}}_l$  <sup>(63)</sup>.

Notre problème est maintenant celui du filtrage pour le système linéaire stochastique discrétisé défini en relation (4.10). Le problème du filtrage consiste à estimer le vecteur d'état, dans notre cas :  $\underline{\mathbf{Y}}_k$ , compte tenu de toutes

<sup>59</sup>Par exemple en discrétisant :  $\left. \frac{d\underline{\mathbf{X}}(t)}{dt} \right|_{t=t_k} = \frac{\underline{\mathbf{X}}_{t_{k+1}} - \underline{\mathbf{X}}_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}$  (schéma explicite) ou bien

$\left. \frac{d\underline{\mathbf{X}}(t)}{dt} \right|_{t=t_k} = \frac{\underline{\mathbf{X}}_{t_k} - \underline{\mathbf{X}}_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}$  (schéma implicite). On trouve dans la littérature, diverses formules de dérivation (cf. par exemple

M. Sibony et J-C. Mardon, 1982. Approximations et équations différentielles, Hermann, Paris).

<sup>60</sup>Dans le cas du schéma explicite :  $\left. \frac{d\underline{\mathbf{X}}(t)}{dt} \right|_{t=t_k} = \frac{\underline{\mathbf{X}}_{t_{k+1}} - \underline{\mathbf{X}}_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}$  on obtient :

$\underline{\mathbf{\Phi}}_k = \Delta t \underline{\mathbf{A}}(t_k) + \underline{\mathbf{I}}$

<sup>61</sup>Les équations pour le problème global discrétisé sont :

$$\underline{\mathbf{X}}_{k+1} = \underline{\mathbf{\Phi}}_k \underline{\mathbf{X}}_k + \underline{\mathbf{B}}_k \underline{\mathbf{F}}_k + \underline{\mathbf{\Gamma}}_k \underline{\mathbf{\xi}}_k \quad \text{équation d'état} \quad (4.11)$$

$$\underline{\mathbf{U}}_k = \underline{\mathbf{C}}_k \underline{\mathbf{X}}_k + \underline{\mathbf{D}}_k \underline{\mathbf{F}}_k + \underline{\mathbf{W}}_k \quad \text{équation d'observation} \quad (4.12)$$

<sup>62</sup> $E \left[ \underline{\mathbf{\xi}}_k \underline{\mathbf{W}}_l^T \right] = 0 \quad \forall k \text{ et } \forall l.$

<sup>63</sup> $E \left[ \underline{\mathbf{Y}}_0 \underline{\mathbf{\xi}}_k^T \right] = 0 \quad \forall k \text{ et } E \left[ \underline{\mathbf{Y}}_0 \underline{\mathbf{W}}_l^T \right] = 0 \quad \forall l.$

les mesures disponibles à l'instant  $t_k$ . On peut aussi obtenir une estimation conjointe de l'état et des paramètres du système étudié. On note  $\underline{\mathbf{Y}}_{k/n}$  l'estimation à l'instant  $t_k$  compte tenu des informations disponibles jusqu'à l'instant  $t_n$  <sup>(64)</sup> ; elle est définie par :

$$\underline{\mathbf{Y}}_{k/n} = E[\underline{\mathbf{Y}}_k / \underline{\mathbf{V}}_0, \underline{\mathbf{V}}_1, \dots, \underline{\mathbf{V}}_n] \quad (4.13)$$

où  $E[\cdot]$  est l'espérance conditionnelle. On déduit de la relation (4.13) que <sup>(65)</sup> :

$$\underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1} = \underline{\Phi}_{k-1} \underline{\mathbf{Y}}_{k-1/k-1}$$

L'erreur d'estimation est :  $\underline{\Delta \mathbf{Y}}_{k,k} = \underline{\mathbf{Y}}_k - \underline{\mathbf{Y}}_{k/k}$ . On cherche donc à minimiser la quantité appelée matrice de covariance de l'erreur d'estimation :  $\underline{\mathbf{P}}_{k,k} = E[\underline{\Delta \mathbf{Y}}_{k,k} \underline{\Delta \mathbf{Y}}_{k,k}^T] = E\left[(\underline{\mathbf{Y}}_k - \underline{\mathbf{Y}}_{k/k})(\underline{\mathbf{Y}}_k - \underline{\mathbf{Y}}_{k/k})^T\right] \cdot \underline{\mathbf{P}}_{k,k-1}$  est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation avant la prise en compte de mesure d'observation disponible à l'instant  $t_k$  ; on déduit des relations précédentes <sup>(66)</sup> que :

$$\underline{\mathbf{P}}_{k,k-1} = \underline{\Phi}_{k-1} \underline{\mathbf{P}}_{k-1,k-1} \underline{\Phi}_{k-1}^T + \underline{\Gamma}_{k-1} \underline{\mathbf{Q}}_{k-1} \underline{\Gamma}_{k-1}^T$$

La forme de l'estimation adoptée est linéaire <sup>(67)</sup> et l'on a de façon récurrente :

$$\underline{\mathbf{Y}}_{k/k} = \underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1} + \underline{\mathbf{K}}_k [\underline{\mathbf{V}}_k - \underline{\mathbf{C}}_k \underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1}]$$

où  $\underline{\mathbf{K}}_k$  est la matrice de gain du filtre qui minimise le critère des moindres carrés stochastiques :  $J_k = \sum_i \left(Y_k^{(i)} - Y_{k/k}^{(i)}\right)^2$  <sup>(68)</sup>. On trouve que :

$$\underline{\mathbf{P}}_{k,k} = \left(\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{K}}_k \underline{\mathbf{C}}_k\right) \underline{\mathbf{P}}_{k,k-1}$$

ainsi que deux expressions pour la matrice de gain <sup>(69)</sup>.

$$\underline{\mathbf{K}}_k = \underline{\mathbf{P}}_{k,k-1} \underline{\mathbf{C}}_k^T \left(\underline{\mathbf{C}}_k \underline{\mathbf{P}}_{k,k-1} \underline{\mathbf{C}}_k^T + \underline{\mathbf{R}}_k\right)^{-1}$$

et :

$$\underline{\mathbf{K}}_k = \underline{\mathbf{P}}_{k,k} \underline{\mathbf{C}}_k^T \underline{\mathbf{R}}_k^{-1}$$

La quantité  $\underline{\mathbf{P}}_{k,k}$  traduit la confiance que nous pouvons avoir dans le modèle adopté et  $\underline{\mathbf{R}}_k$  le niveau de bruit sur la mesure. Il apparaît au vu des formules précédentes que, à niveau de bruit  $\underline{\mathbf{R}}_k$  constant si  $\underline{\mathbf{P}}_{k,k}$  est faible,

<sup>64</sup>Si  $k = n$ , on cherche à déterminer une estimation de l'état, compte tenu de toutes les mesures disponibles à l'instant  $t_n$ . C'est le cas du filtrage. Si  $k < n$ , on ne prend en compte qu'une partie des mesures disponibles. On parle alors d'interpolation. Si  $k > n$ , il s'agit de prévoir une estimation du vecteur d'état. On fait alors une extrapolation.

<sup>65</sup> $\underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1} = E[\underline{\mathbf{Y}}_k / \underline{\mathbf{V}}_0, \underline{\mathbf{V}}_1, \dots, \underline{\mathbf{V}}_{k-1}] = E[\underline{\Phi}_{k-1} \underline{\mathbf{Y}}_{k-1/k-1} / \underline{\mathbf{V}}_0, \underline{\mathbf{V}}_1, \dots, \underline{\mathbf{V}}_{k-1}]$   
 $+ E[\underline{\Gamma}_{k-1} \underline{\xi}_{k-1} / \underline{\mathbf{V}}_0, \underline{\mathbf{V}}_1, \dots, \underline{\mathbf{V}}_{k-1}] = \underline{\Phi}_{k-1} E[\underline{\mathbf{Y}}_{k-1/k-1} / \underline{\mathbf{V}}_0, \underline{\mathbf{V}}_1, \dots, \underline{\mathbf{V}}_{k-1}]$   
 $+ \underline{\Gamma}_{k-1} E[\underline{\xi}_{k-1} / \underline{\mathbf{V}}_0, \underline{\mathbf{V}}_1, \dots, \underline{\mathbf{V}}_{k-1}] = \underline{\Phi}_{k-1} \underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1}$ . On montre en effet que :  $E[\underline{\xi}_{k-1} / \underline{\mathbf{V}}_0, \underline{\mathbf{V}}_1, \dots, \underline{\mathbf{V}}_{k-1}] = 0$ , par les hypothèses sur les propriétés statistiques des séquences  $\underline{\xi}_k$  et  $\underline{\mathbf{W}}_k$  (cf. citons par exemple l'ouvrage suivant : C.K. Chui & G. Chen, 1999. Kalman filtering with real-time applications 3rd Edition, Springer.)

<sup>66</sup>On déduit que :  $\underline{\mathbf{Y}}_k - \underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1} = \underline{\Phi}_{k-1} (\underline{\mathbf{Y}}_{k-1} - \underline{\mathbf{Y}}_{k-1/k-1}) + \underline{\Gamma}_{k-1} \underline{\xi}_{k-1}$

D'où :  $(\underline{\mathbf{Y}}_k - \underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1})^T = (\underline{\mathbf{Y}}_{k-1} - \underline{\mathbf{Y}}_{k-1/k-1})^T \underline{\Phi}_{k-1}^T + \underline{\xi}_{k-1}^T \underline{\Gamma}_{k-1}^T$

$\underline{\mathbf{P}}_{k,k-1} = E\left[(\underline{\mathbf{Y}}_k - \underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1})(\underline{\mathbf{Y}}_k - \underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1})^T\right]$

$= \underline{\Phi}_{k-1} E\left[(\underline{\mathbf{Y}}_{k-1} - \underline{\mathbf{Y}}_{k-1/k-1})(\underline{\mathbf{Y}}_{k-1} - \underline{\mathbf{Y}}_{k-1/k-1})^T\right] \underline{\Phi}_{k-1}^T$

$+ \underline{\Gamma}_{k-1} E[\underline{\xi}_{k-1} \underline{\xi}_{k-1}^T] \underline{\Gamma}_{k-1}^T = \underline{\Phi}_{k-1} \underline{\mathbf{P}}_{k-1,k-1} \underline{\Phi}_{k-1}^T + \underline{\Gamma}_{k-1} \underline{\mathbf{Q}}_{k-1} \underline{\Gamma}_{k-1}^T$ .

<sup>67</sup>Cette relation exprime le fait que l'estimation du vecteur d'état à l'instant  $t_k$  :  $\underline{\mathbf{Y}}_{k/k}$  est égale à l'estimation à l'instant  $t_{k-1}$  :  $\underline{\mathbf{Y}}_{k/k-1}$  mise à jour avec une certaine pondération qui tient compte de l'écart entre la mesure effective et la mesure prédite.

<sup>68</sup>Le filtre de Kalman est un filtre à **minimum de variance**. On montre par des considérations d'algèbre linéaire que l'on peut ramener la minimisation de la matrice de covariance  $\underline{\mathbf{P}}_k$  à celle de sa trace, c'est-à-dire à la minimisation du critère :

$J_k = J(t_k) = J_{t_k} = \sum_i \left(Y_k^{(i)} - Y_{k/k}^{(i)}\right)^2$  où  $i$  varie de 1 à la dimension de  $\underline{\mathbf{Y}}$ .

<sup>69</sup>L'opération consommatrice de temps dans le processus de filtrage de Kalman est le calcul des matrices de gain  $\underline{\mathbf{K}}_k$ .

le gain  $\underline{\underline{K}}_k$  est faible : on fait davantage confiance à l'estimation obtenue à partir du modèle. Au contraire, si  $\underline{\underline{P}}_{k,k}$  est élevé, la confiance dans le modèle est faible :  $\underline{\underline{K}}_k$  sera élevé et la contribution du terme de correction pondéré sera plus forte. De plus, à  $\underline{\underline{P}}_{k,k}$  constant, si  $\underline{\underline{R}}_k$  est faible, les mesures sont faiblement bruitées et la valeur élevée du gain donnera plus de poids à la mesure. Si  $\underline{\underline{R}}_k$  est élevé, le gain sera faible et le poids du terme de correction sera plus faible.

A partir de 1975 et jusqu'en 1985, les progrès des connaissances en analyse numérique et des performances des matériels informatiques ont permis au filtre de Kalman de prendre un nouvel essor. Pendant cette décennie, les applications de cette technique ont été nombreuses et variées. Citons par exemple : la dynamique des structures, le traitement de la parole ou la médecine et l'application plus fameuse d'un système de correction et de mise à jour de la trajectoire qui a été implanté sur certains avions militaires américains. Pourtant le début des années 90 marqua un ralentissement des investigations sur les applications du filtrage de Kalman qui se concentrèrent sur le génie parasismique et plus particulièrement sur la fatigue des structures soumises à des séismes. Dans ce qui suit, nous présentons l'application du filtrage de Kalman à l'identification des caractéristiques d'une charge mobile sur une poutre simplement appuyée en ses deux extrémités.

### C.2.1 Application au cas d'une charge mobile sur une poutre

Le pont est schématisé par une poutre d'Euler-Bernoulli en appui simple en ses deux extrémités. La poutre est homogène, de longueur  $\ell$ , de section constante  $S$ , de masse par unité de longueur  $\mu$  et de module d'Young  $E$ .

Pour la poutre seule sur appuis simples, l'équation aux dérivées partielles qui régit les vibrations libres transverses de la poutre :

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.14)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$y(0, t) = 0, \left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad y(\ell, t) = 0, \left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=\ell} = 0$$

et les conditions initiales  $y(x, 0) = y_0(x)$  et  $\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = y_1(x)$ , où  $y_0(x)$  et  $y_1(x)$  sont définies pour  $x \in [0, \ell]$ . La méthode de séparation des variables  $y(x, t) = \phi(x)q(t)$  permet d'obtenir les pulsations propres :  $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$  ainsi que les formes propres :  $\phi_n(x) = \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$ . Finalement, la réponse transverse globale est la superposition des réponses modales :

$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) \{A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\}$  où les constantes  $A_n$  et  $B_n$  sont déterminées à partir des conditions initiales<sup>(70)</sup>. Finalement, la solution s'écrit :

$$y(x, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} Y(n, t) \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (4.15)$$

avec

$$Y(n, t) = \int_0^{\ell} \left[ y_0(x) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} y_1(x) \sin(\omega_n t) \right] \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) dx$$

Par la suite, on introduit dans le comportement de la poutre, un amortissement visqueux proportionnel à la vitesse de vibration. L'équation (4.14) devient :

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.16)$$

---

<sup>70</sup> On a :  $y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$ . On remarque que si l'on prolonge  $y_0(x)$  en tant que fonction de  $x$  par imparité, puis par périodicité de période  $2\ell$ , l'égalité précédente est le développement en séries de Fourier du prolongement de  $y_0(x)$ . On a donc :  $A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} y_0(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) dx$ . On a aussi :  $y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$  et en suivant le même raisonnement, on obtient que :  $B_n = \frac{2}{\omega_n \ell} \int_0^{\ell} y_1(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) dx$

On suppose qu'à l'instant initial où la charge arrive en l'extrémité située à gauche ( $x = 0$ ), la poutre est au repos, i.e.; sa déflexion et sa vitesse sont nulles en tout point. Les conditions initiales s'écrivent alors :

$$y(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (4.17)$$

Plusieurs modèles de charges circulant à vitesse constante  $V$  ont été étudiés : (1) une charge statique  $M$ , (2) une charge statique à deux essieux, constituée de deux charges statiques  $M_1$  et  $M_2$  séparées par une distance  $d$ , et (3) un oscillateur formé d'une masse  $m$  posée sur un ressort de rigidité  $k$  en parallèle avec un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement  $c$ . On suppose que la masse de la charge mobile est faible comparée à celle de la poutre, ce qui entraîne que seuls les effets de la gravité sur la masse mobile seront pris en compte. La démarche pour obtenir la réponse analytique de la déflexion de la poutre  $y(x, t)$  est donnée ici uniquement pour le cas (1) de la charge statique  $M$  circulant à la vitesse  $V$  sur la poutre. L'équation aux dérivées partielles qui régit les vibrations transverses de la poutre s'écrit alors :

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \delta(x - Vt)Mg \quad (4.18)$$

En s'inspirant de la réponse obtenue en relation (4.15), on recherche la solution de l'edp (4.18) sous la forme :

$$y(x, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} Y(n, t) \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (4.19)$$

avec  $Y(n, t) = \int_0^\ell y(x, t) \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) dx$ . On multiplie ensuite l'edp (4.18) par  $\sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$  et on intègre suivant  $x$  entre 0 et  $\ell$  et on utilise les conditions aux limites ainsi que les propriétés de la fonction de Dirac. Finalement, en posant  $\beta_n = \frac{\omega_b}{\omega_n}$  et  $\Omega = \frac{\pi V}{\ell}$ , on obtient l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\ddot{Y}(n, t) + 2\beta_n\omega_n \dot{Y}(n, t) + \omega_n^2 Y(n, t) = \frac{Mg}{\mu} \sin(n\Omega t) \quad (4.20)$$

Les conditions initiales (4.17) permettent d'écrire que :

$Y(n, 0) = 0$  et  $\dot{Y}(n, 0) = 0$ . Pour  $n$  fixé, l'équation différentielle (4.20) avec les conditions initiales précédentes peut être vue comme celle qui régit la réponse d'un oscillateur linéaire visqueux soumis à une force harmonique  $F(t) = F_0 \sin(n\Omega t)$  avec  $F_0 = \frac{Mg}{\mu}$ , avec des conditions initiales nulles et dont la pulsation propre de l'oscillateur conservatif associé vaut :  $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$  et de taux d'amortissement  $\beta_n = \frac{\omega_b}{\omega_n}$  (on suppose que  $0 \leq \beta_n < 1$ ).

La solution globale de l'équation (4.20)<sup>(71)</sup> s'écrit comme la somme de la solution générale en régime transitoire  $Y_1(n, t)$ <sup>(72)</sup> et de la solution en régime permanent  $Y_2(n, t)$ <sup>(73)</sup> :

$$\begin{aligned} Y(n, t) = & A_n e^{-\beta_n \omega_n t} \cos(\tilde{\omega}_n t) + B_n e^{-\beta_n \omega_n t} \sin(\tilde{\omega}_n t) \\ & + \frac{Mg}{\mu \omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2}} \sin(n\Omega t - \arctan\left[\frac{2\beta_n X_n}{1 - X_n^2}\right]) \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{Mg}{\mu \omega_n^2} \frac{2\beta_n X_n}{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2} \\ B_n &= \frac{Mg}{\mu \omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_n^2}} X_n \frac{2\beta_n^2 - (1 - X_n^2)}{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2} \end{aligned}$$

A partir de la relation (4.19), on obtient l'expression générale de  $y(x, t)$  :

<sup>71</sup>La technique la plus courante pour résoudre l'équation différentielle (4.20) est l'utilisation de la transformée de Laplace. La transformée de Laplace de  $Y(n, t)$  s'écrit alors :  $T.L. \{Y(n, t)\}(p) = \frac{Mgn\Omega}{\mu} \frac{p}{p^2 + n^2\Omega^2} \frac{1}{p^2 + 2\beta_n\omega_n p + \omega_n^2}$ .

<sup>72</sup> $Y_1(n, t) = A_n e^{-\beta_n \omega_n t} \cos(\tilde{\omega}_n t) + B_n e^{-\beta_n \omega_n t} \sin(\tilde{\omega}_n t)$  où  $\tilde{\omega}_n$  est la pseudo-pulsation propre :  $\tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - \beta_n^2}$ .

<sup>73</sup> $Y_2(n, t) = Y_{2n} \sin(n\Omega t - \phi_n)$  avec  $Y_{2n} = \frac{Mg}{\mu \omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2}}$

où  $X_n = \frac{n\Omega}{\omega_n} = \frac{V\ell}{n\pi} \sqrt{\frac{\mu}{EI}}$  et  $\phi_n = \arctan\left[\frac{2\beta_n X_n}{1 - X_n^2}\right]$ . On a :  $\cos(\phi_n) = \frac{1 - X_n^2}{\sqrt{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2}}$

et  $\sin(\phi_n) = \frac{2\beta_n X_n}{\sqrt{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2}}$ .

$$y(x, t) = \frac{2Mg}{\mu\ell\omega_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2} \left[ \begin{aligned} &X_n e^{-\beta_n \omega_n t} \left( 2\beta_n \cos(\tilde{\omega}_n t) + \frac{2\beta_n^2 - (1 - X_n^2)}{\sqrt{1 - \beta_n^2}} \sin(\tilde{\omega}_n t) \right) \\ &+ (1 - X_n^2) \sin(n\Omega t) - 2\beta_n X_n \cos(n\Omega t) \end{aligned} \right] \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (4.21)$$

L. Fryba<sup>(74)</sup> introduit deux paramètres sans dimension :  $\alpha = nX_n = \frac{V\ell}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{EI}}$  et  $\beta = \frac{\omega_b}{\omega_1} = n^2 \frac{\omega_b}{\omega_n} = n^2 \beta_n$ . Il rappelle l'expression de la déflexion en milieu de travée d'une poutre sur appuis simples soumise à une charge statique  $Mg$  qui vaut :  $y_0 = \frac{Mg\ell^3}{48EI}$ . Il approche ensuite  $\frac{2Mg\ell^3}{\pi^4 EI} = \frac{2Mg}{\mu\ell\omega_1^2}$  par  $y_0$  et par suite  $\frac{2Mg}{\mu\ell\omega_n^2} = \frac{1}{n^4} \frac{2Mg}{\mu\ell\omega_1^2} \simeq \frac{1}{n^4} y_0$  et la relation précédente (4.21) devient <sup>(75)</sup> :

$$y(x, t) = y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 [n^2 (n^2 - \alpha^2)^2 + 4\beta^2 \alpha^2]} \left[ \begin{aligned} &e^{-\omega_b t} \left( 2n\alpha\beta \cos(\tilde{\omega}_n t) + n\alpha \frac{2\beta^2 - n^2(n^2 - \alpha^2)}{\sqrt{n^4 - \beta^2}} \sin(\tilde{\omega}_n t) \right) \\ &+ n^2 (n^2 - \alpha^2) \sin(n\Omega t) - 2n\alpha\beta \cos(n\Omega t) \end{aligned} \right] \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

Dans le cas d'un oscillateur de masse  $m$ , de raideur  $k$  et d'amortissement  $c$ , la présence de l'oscillateur fait intervenir un couplage entre les oscillations de la charge notées  $u(t)$  et celles de la poutre  $y(x, t)$ , on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) &= c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + ky(x, t) \\ EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} &= \delta(x - Vt) [mg - m\ddot{u}(t)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

La technique utilisant le filtrage de Kalman a été testée sur la déflexion d'une poutre simplement appuyée avec un oscillateur en mouvement. Le but est de déterminer la masse et la vitesse de l'oscillateur en mouvement sur une poutre à partir de la réponse transverse de la poutre à son passage. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sont connues. Elle nécessite une représentation d'état du système étudié et nous a permis une estimation de l'état et des paramètres de l'oscillateur. La résolution de ce problème est faite à l'aide d'une procédure d'estimation linéaire ou non suivant le vecteur d'état retenu par filtrage de Kalman.

Les caractéristiques de la poutre sont : longueur :  $50\text{ m}$ , section  $7.5\text{ m}^2$ , moment d'inertie  $I = 6.0\text{ m}^2$ , module d'Young  $E = 3.34 \cdot 10^{10}\text{ N/m}^2$  et masse linéique de la poutre  $\mu = 1800\text{ kg/m}$ . Deux cas ont été examinés suivant que l'oscillateur a ou n'a pas d'énergie initiale en arrivant sur la poutre. Le vecteur d'état est formé des déflexions de la poutre à un instant donné plus des paramètres à identifier. Les déflexions de la poutre ont été calculées par le logiciel NASTRAN et ont été perturbées par plusieurs séquences bruitées dont l'amplitude peut atteindre jusqu'à 15% du maximum de la déflexion mesurée. Le tableau ci-dessous présente les résultats des simulations numériques obtenues lorsque l'on prend pour mesure d'observation la déflexion de la poutre  $(y(x_0, t_k))_{k \in I}$  :

Les résultats des diverses simulations numériques sont d'une précision satisfaisante. On peut noter la précision des estimations de la masse de la charge même si certains autres paramètres tels l'amortissement de la poutre sont identifiés de façon plus grossière. Mais la difficulté d'estimer certaines quantités ne vient pas directement d'une faiblesse de l'algorithme mais plutôt de la faible influence de ces quantités sur la réponse de la poutre.

#### *Production réalisée*

– 2 rapports de stage de DEA : de Jacques Sainte-Marie 1995 et de Houman Kamalzadeh 1996.

<sup>74</sup>Ladislav Fryba. 1999, Vibration of solids and structures under moving loads, 3rd Edition, Thomas Telford Editors.

<sup>75</sup>à l'aide des changements suivants :  $\beta_n \omega_n = \omega_b$  et  $\frac{1}{[1 - X_n^2]^2 + [2\beta_n X_n]^2} = \frac{n^6}{[n^2(n^2 - \alpha^2)^2 + 4\beta^2 \alpha^2]}$  et  $2X_n \beta_n = \frac{2n\alpha\beta}{n^4}$  et  $\frac{2\beta_n^2 - (1 - X_n^2)}{\sqrt{1 - \beta_n^2}} = \frac{1}{n^2} \frac{2\beta^2 - n^2(n^2 - \alpha^2)}{\sqrt{n^4 - \beta^2}}$  et  $(1 - X_n^2) = \frac{1}{n^2} (n^2 - \alpha^2)$

cas	$M^{est}$	$\frac{M^{est}-M}{M}$	$V^{est}$	$\frac{V^{est}-V}{V}$	$\omega^{est}$	$\frac{\omega^{est}-\omega}{\omega}$	$\beta^{est}$	$\frac{\beta^{est}-\beta}{\beta}$
(1)	20 926	4.63%	20.8	4.0%	10.45	4.5%	0.159	59%
(2)	20 734	3.67%	20.5	2.5%	9.70	-3.0%	0.166	66%

**Tab. 4.4** Vecteur d'état généralisé estimé à partir de la déformée du système poutre-charge calculé avec NASTRAN

- 2 publications dans colloque avec actes :
  - 1 au 12ème Congrès français de Mécanique, 1995 [CONF24].
  - 1 à Int. Symposium on New Advances in Modal Synthesis of Large Structures Non-linear, Damped and Non-deterministic Cases, Lyon 1995 [CONF26].

### C.3 Pesage en marche de véhicules lourds sur ouvrages d'art.

Les dommages causés aux chaussées par le trafic routier proviennent majoritairement des charges pondérales importantes engendrées par les véhicules lourds. Dans les conditions normales de circulation, les variations dynamiques du poids d'un essieu peuvent atteindre  $\pm 20\%$  du poids statique. Depuis 1980, des efforts significatifs ont été menés au LCPC pour la mise au point de techniques de mesure et de calcul permettant le pesage en marche de véhicules routiers sur ponts. Ces techniques permettent à la fois le dimensionnement et l'entretien des ouvrages d'art mais aident aussi au contrôle du respect de la réglementation routière. Il nous a donc paru important d'étudier de façon précise les sollicitations dynamiques appliquées aux chaussées par les poids lourds afin de minimiser leurs effets mais aussi de faire respecter la réglementation établie en matière de charge limite (totale ou par essieu). Le pesage en marche tente de répondre à ces deux attentes<sup>(76)</sup>.

Cette section est divisée en deux thèmes de recherche à savoir le pesage en marche sur routes (thème I) et le pesage en marche sur ponts (thème II).

- Le premier thème<sup>(77)</sup> s'intéresse au problème du pesage en marche sur routes par multi-capteurs. L'objectif de cette recherche est la mise au point d'un système de pesage en marche de véhicules lourds par grille multi-capteurs à partir de mesures du poids dynamique des essieux d'un poids lourd ; les mesures étant réalisées par des capteurs piézo-électriques ou fibres optiques. A l'aide des données "in situ", on cherche à bâtir une procédure d'estimation et un algorithme permettant de remonter au poids statique  $P_{stat}$  des essieux.

Des essais sur site réel ont été effectués par le Laboratoire Régional de l'Ouest Parisien de Trappes<sup>(78)</sup>. Les mesures discrètes de forces d'impact obtenues par les capteurs piézo-électriques installés sur le site de Trappes représentent les variations du poids dynamique  $P_{dyn}(t)$  d'un essieu circulant à vitesse normale constante sur une chaussée<sup>(79)</sup>. On peut considérer que ces signaux sont à largeur de bande limitée (transformée de Fourier à support limité) ; pour ce qui nous concerne entre  $-15Hz$  et  $15Hz$ . Deux pistes qui paraissaient susceptibles de fournir des résultats intéressants s'ouvraient à nous. La première était directement liée à l'étude du contenu fréquentiel du signal  $P_{dyn}(t)$ , le signal étant à bande limitée, l'idée était de mettre en oeuvre des méthodes itératives de reconstruction à l'aide d'un échantillonnage irrégulier. La seconde était fondée sur un traitement probabiliste par espérance conditionnelle : simuler la loi conjointe de  $P_{stat}$ ,  $\{P_{dyn}(t_k)\}_k$  puis calculer l'espérance conditionnelle  $E[P_{stat}/\{P_{dyn}(t_k)\}_k]$ . Cette démarche nécessite l'obtention d'une base de données de poids dynamiques d'essieux suivant différentes configurations de charges et de caractéristiques géométriques et mécaniques de véhicules lourds ( par

<sup>76</sup>Le pesage en marche a fait l'objet d'un axe de recherche qui a réellement démarré au LMSGC en 1995 avec l'arrivée d'un ingénieur des Travaux Publics de l'Etat : Jacques Sainte-Marie et en 1996 d'un post-doctorant d'origine irlandaise : Tony Dempsey.

<sup>77</sup>Ce thème essaie de tenir compte au mieux des délais et objectifs du projet européen "WAVE" (Weighing-in-motion of Axles for Vehicles in Europe) ainsi que des termes du contrat LCPC-DTT (Direction des Transports Terrestres, MM. Duquesne et Marchadour). Le travail correspond essentiellement dans le travail de thèse de Jacques Sainte-Marie à l'ENPC dont j'ai partagé avec M. Michel Frémond, la direction de thèse.

<sup>78</sup>MM. Siffert et Dolcemascolo du LROP de Trappes étaient chargés des essais sur la grille des multi-capteurs.

<sup>79</sup>L'hypothèse retenue est que la moyenne temporelle du poids dynamique  $P_{dyn}(t)$  d'un essieu est égale à son poids statique  $P_{stat}$  :  $P_{stat} = \frac{1}{T} \int_T P_{dyn}(t) dt$ .

exemple à l'aide d'un logiciel de modélisation multi-corps). Cette dernière technique semble plus riche que la précédente pour ce qui concerne la précision de l'estimation mais elle est plus longue à programmer (formalisme de la méthode, apprentissage de l'algorithme).

Cependant, les conclusions de l'étude<sup>(80)</sup> sur l'estimation de la précision des mesures nous ont amenés à remettre en question la fiabilité des résultats actuellement obtenus après traitement LEEM<sup>(81)</sup> sur la station multi-capteurs.

Le plan de travail du thème I a donc été modifié pour tenir compte de ces conclusions et du fait que le nombre de passages de camions sur les capteurs était à l'époque largement insuffisant pour pouvoir mener à bien des études statistiques pertinentes. La démarche suivie a été alors la seconde citée précédemment, à savoir de mettre au point des algorithmes de reconstruction des signaux<sup>(82)</sup> afin de retrouver le poids statique d'un essieu ou d'un véhicule lourd circulant sur une chaussée à partir des mesures discrètes de forces d'impact. Le signal est transformé (reconstruit) de telle sorte que l'information spécifique recherchée soit plus facile à extraire. On peut ainsi tenir compte de la mécanique du phénomène étudié et reconstruire le signal "au mieux" à partir de fonctions qui lui sont "naturelles". Pour mieux connaître ces fonctions, une étude simplifiée de l'interaction dynamique entre le véhicule et la chaussée a été effectuée. Pour les poids lourds traités, la force d'impact a pu être correctement approchée avec seulement quelques modes associés au véhicule considéré<sup>(83)</sup>.

- Le thème II s'intéresse aux systèmes de pesage en marche sur ponts<sup>(84)</sup>. Une approche possible s'appuie sur la technique de filtrage de Kalman présentée ci-dessus. Les résultats obtenus pour le modèle poutre+oscillateur mobile nous rendent confiants pour l'extension de cette technique à des modélisations pont+camion plus complexes.

Nous nous sommes ensuite intéressés au pesage en marche de véhicules sur ponts à dalle orthotrope<sup>(85)</sup>. La connaissance des charges de trafic appliquées pourra fournir des informations précises sur la fatigue de l'ouvrage. Ces ponts sont des structures relativement légères et très sensibles aux fortes charges de trafic. L'épaisseur de la chaussée pour ces ouvrages est trop mince pour que l'on puisse y installer des capteurs. Le pesage en marche de véhicules lourds a donc été effectué à partir des réponses de capteurs installés sur les augets d'un pont à dalle orthotrope. L'estimation des poids statiques par essieux, de la vitesse du véhicule ainsi que de la distance entre essieux est obtenue par des techniques de minimisation d'un critère utilisant les lignes d'influence<sup>(86)</sup>. Un modèle statique du pont (ligne d'influence d'une poutre continue) a été utilisé dans une première phase ; ce modèle a été ensuite recalé à partir de la ligne d'influence mesurée sur l'ouvrage en faisant circuler un poids-lourd calibré à deux essieux. En conclusion de cette étape, nous pouvons dire que la réponse du pont est très sensible à la position transverse des poids lourds par voie de circulation. Un modèle à deux dimensions a donc été utilisé : chaque raidisseur longitudinal a été modélisé par une poutre, ces raidisseurs étant reliés transversalement par des lignes d'influence transverses obtenues soit à partir d'essais, soit à partir d'une modélisation par éléments finis de l'ouvrage.

<sup>80</sup>Cette étude a été effectuée en septembre 1995 par Xavier Martiré, ingénieur de l'Ecole Polytechnique, alors stagiaire de l'Ecole des Ponts et Chaussées.

<sup>81</sup>Le rapport souligne le manque d'informations et de clarté en ce qui concerne la méthode de traitement (LEEM) du signal appliquée aux réponses des capteurs.

<sup>82</sup>Les méthodes de reconstruction qui sont généralement utilisées, sont basées sur des techniques d'interpolation polynomiale, sur des extensions de la théorie de représentation de Shannon et sur des résultats récents liés aux développements en ondelettes. La technique développée par J. Sainte-Marie est à mi-chemin entre ces deux dernières ; elle est simple d'utilisation, stable et robuste vis-à-vis du bruit de mesure. La méthode développée s'appelle ACT Adaptive weights Conjugate gradient Toeplitz method initiée par le Professeur Feichtinger en 1995.

<sup>83</sup>J. Sainte-Marie, 1999. Echantillonnage de signaux à bande limitée. Application à l'étude de l'interaction véhicule-chaussée. Thèse de doctorat, ENPC.

<sup>84</sup>Il fait suite à une association de recherche développée à partir de 1993 avec la Lehrstuhl für Baumechanik de l'Université Technique de Munich (M. le Professeur H. Grundmann (directeur) et M. le Docteur W. Baumgärtner et M. le Dipl.Ing. H. Waubke). Cette recherche s'est vu attribuer de 1993 à 1995 un financement d'un programme bi-latéral d'échanges franco-allemand PROCOPE qui a permis l'accueil de plusieurs stagiaires allemands de l'Université technique de Munich au LMSGC (trois étudiants en stage de Praktikum et un en stage de Diplomarbeit).

<sup>85</sup>Une dalle orthotrope pour un ouvrage du génie civil désigne une dalle en acier de faible épaisseur raidie dans les deux directions orthogonales. Habituellement, la plaque est raidie transversalement par des entretoises ou pièces de ponts et longitudinalement par des raidisseurs ou augets.

<sup>86</sup>On appelle ligne d'influence d'un effet (moment fléchissant, effort tranchant, contraintes, flèche) la courbe qui permet de connaître, dans une section  $S$  fixe prédéterminée d'une poutre, généralement continue, située à une distance  $\alpha$  d'une extrémité, la valeur de cet effet sous l'action d'une charge mobile unitaire lorsqu'elle se trouve à une distance  $x$  de la même extrémité. Par exemple, la ligne d'influence de la flèche  $v_\alpha(x)$  dans la section  $S$  est en vertu du théorème de réciprocité la déformée de la poutre obtenue pour une charge unité appliquée à la section  $S$ . Les lignes d'influence de flèches permettent, par l'application du théorème de réciprocité, de résoudre le problème de la recherche de la position la plus défavorable des charges mobiles dans un système hyperstatique.



*Production réalisée*

- **1** rapport de contrat RVI/LCPC/CNRS 1995 [RAPP6].
- **1** rapport de DEA de Laurence Bourlat 1997.
- 1 rapport de stage post-doctoral de Tony Dempsey 1998.
- **1** publication dans colloque avec actes :
  - 1 à 2nd European Conference on Weigh-in-Motion of Road Vehicles, Lisbonne, 1998 [CONF29].
- **1** rapport de thèse de Jacques Sainte-Marie 1999.

# Chapitre 5

## Perspectives

Ce chapitre présente les perspectives et les actions futures que je souhaiterai poursuivre dans un futur proche. Le fil conducteur est l'élaboration de techniques d'identification en dynamique non linéaire. Le chapitre est divisé en trois titres. Le premier titre concerne les recherches menées dans le réseau du LCPC, sur l'identification et les problèmes inverses. Le second titre s'intéresse à l'extension des notions d'analyse modale en dynamique non linéaire. Le dernier titre traite de l'identification de modèles de structures en dynamique non linéaire.

### A Identification - Problèmes inverses au LCPC

Dans le cadre des opérations de recherche dans la programmation de la recherche du LCPC, après un premier cahier des charges rédigé en mai 2001 et deux réunions d'information et de concertation avec des collègues du LCPC et des laboratoires régionaux (en dates respectives du 28/06/2001 à l'ENPC (Marne la Vallée) et du 02/2003 au LCPC Nantes), un cahier des charges pour la nouvelle opération 11GEP2 a été élaboré. Cette nouvelle opération est formée de deux thèmes voisins : un sur l'identification et les problèmes inverses sous ma responsabilité et un sur le contrôle de structures sous la responsabilité de Frédéric Bourquin. Le premier thème a pour objectif la rédaction d'un ouvrage de synthèse sur l'identification et les problèmes inverses (méthodes et applications) au sein du LCPC.

#### A.1 Opération de recherche au sein du LCPC

**titre de l'opération :**

Identification, contrôle et problèmes inverses

**durée envisagée :**

4 ans

**programme de rattachement :**

programme G "Nouveaux matériaux et nouvelles technologies"

**nom des responsables :**

Pierre Argoul (responsable) et Frédéric Bourquin (co-responsable)

**problématique scientifique :**

L'utilisation de techniques d'identification de paramètres est généralement un passage obligé pour le chercheur ou l'ingénieur qui cherche à établir un lien entre un modèle mathématique théorique et une série de mesures expérimentales du phénomène étudié. On peut citer comme exemples : la détermination des paramètres de lois de comportement, la détermination des conditions aux limites, l'actualisation de modélisations de structures à partir de grandeurs mesurées ou l'identification de défauts à partir de méthodes non-destructives. Le contrôle actif s'inspire d'une démarche similaire mais dans ce cas, les mesures sont en temps réel et on agit directement sur la structure au moyen de sources secondaires, qui, par superposition avec les sources primaires, produisent un signal résiduel minimisé<sup>(1)</sup>. Ainsi, connaissant l'état initial du système, on désire agir sur celui-ci, via des

---

<sup>1</sup>Contrairement aux moyens passifs couramment mis en oeuvre dans le contrôle passif des vibrations tels que les amortisseurs, les plots de suspensions pour les machines, les garnissages acoustiques, les mousses diverses, le contrôle actif s'effectue au moyen de sources secondaires, de bruit ou de vibration.

fonctions sources secondaires, appelées aussi contrôles ou commandes, de sorte à atteindre un état final fixé a priori.

De nos jours, la confrontation des observations expérimentales et des résultats des simulations numériques devient, de plus en plus, une voie prometteuse qui va permettre soit l'amélioration de la représentativité des modèles, soit la surveillance de l'évolution de l'état du système à l'étude, à partir de modèles représentatifs, lors de leur mise en fonctionnement ou encore la validation de mesures imparfaitement fiabilisées qui peuvent considérablement perturber un bilan. L'objectif est d'utiliser la confrontation des résultats expérimentaux et des prédictions de calcul pour améliorer les modélisations en identifiant les paramètres caractéristiques des modèles. Les techniques d'identification peuvent aussi permettre de surveiller efficacement les ouvrages, en leur associant un modèle réactualisé régulièrement, capable de prédire leur comportement, de localiser les endommagements provenant soit de l'usure de fonctionnement et/ou de causes accidentelles.

Cette opération comporte **deux sujets** différents mais dont la problématique scientifique est liée : un sur l'identification et les problèmes inverses et un sur le contrôle.

Les deux paragraphes suivants présentent brièvement les difficultés majeures de ces deux sujets.

**Difficultés pour l'identification et les problèmes inverses** Les difficultés qui se posent en théorie inverse sont d'une part, le caractère mal-posé ou incorrectement posé qui apparaît lorsque l'une au moins des trois conditions nécessaires pour que le problème soit bien posé<sup>(2)</sup>, n'est pas vérifiée. Habituellement, les mesures sont bruitées et en nombre fini. L'existence d'une solution au problème d'inversion de l'opérateur reliant les paramètres ou les conditions inconnus aux données expérimentales n'est pas alors certaine<sup>(3)</sup>. Lorsqu'une solution existe, on peut ensuite traduire les effets désagréables du caractère mal-posé (non-unicité et non-stabilité de la solution) par le fait que :

- l'opérateur reliant les paramètres inconnus aux données expérimentales est singulier, entraînant une non-unicité de la solution du problème inverse et
- comme les mesures sont entachées d'incertitudes, de petits changements dans les données peuvent causer de grandes variations sur la solution calculée.

Pour élargir la notion de solution au problème inverse (solutions généralisées), on est habituellement conduit à résoudre un problème d'optimisation au sens des moindres carrés : minimiser dans l'espace des réponses un écart entre les réponses supposées à travers un modèle et les réponses réellement mesurées, souvent entachées d'erreur.

D'autre part, la plupart de ces problèmes exigent la résolution d'un très grand nombre de problèmes directs, entraînant un coût en temps de calcul souvent prohibitif, d'où l'utilisation des méthodes adjointes ou d'autres techniques permettant la réduction de la dimension du système numérique.

**Difficultés pour les problèmes de contrôle** Dans un problème de contrôle, plusieurs questions de fond se posent également :

- peut-on atteindre l'état final ?
- si oui, existe-t-il un contrôle permettant de l'atteindre en temps fini ? en temps minimal ? en minimisant une fonction coût (par exemple l'énergie consommée) ?
- si non, peut-on approcher l'état recherché ?

Les difficultés qui se posent sont celles des instabilités liées au phénomène de spill-over<sup>(4)</sup> et le rôle des capteurs non-colocalisés<sup>(5)</sup> aux actionneurs dans l'efficacité et la stabilité des algorithmes de contrôle des structures.

**Identification et problèmes inverses - Positionnement au LCPC** Au sein du LCPC, des travaux de recherche en théorie inverse ont déjà été menés il y a plus de dix ans, citons comme exemple : les techniques de tomographie sismique avec les reconstructions géométriques à deux et trois dimensions (Philippe Cote, Richard Lagabrielle, Odile Abraham, etc.) pour la reconnaissance géophysique ou l'identification de paramètres dans les modèles de

<sup>2</sup>Un problème est bien posé au sens de Hadamard s'il existe une solution, si elle est unique et si elle dépend continûment des données du problème.

<sup>3</sup>Une solution existe si le vecteur des mesures appartient à l'image de l'opérateur que l'on souhaite inverser, ce qui peut réduire considérablement la notion de solution à une certaine classe de vecteurs mesures.

<sup>4</sup>Les lois de contrôle sont souvent limitées à un nombre fini de modes dont les fréquences appartiennent à une plage donnée et elles doivent garantir la stabilité en présence de modes plus élevés non contrôlés.

<sup>5</sup>Un système de contrôle est colocalisé lorsque chaque actionneur n'utilise que les données de mesure du capteur situé au même endroit. Un système non-colocalisé autorise donc chaque actionneur à disposer d'un maximum d'information sur l'ensemble de la structure et se révèle donc en pratique plus efficace. Pourtant, en théorie concernant les structures flexibles, un système colocalisé est stable avec une loi dissipative alors qu'un système non-colocalisé est génériquement instable.

prévision de la pluie en hydrologie (Hervé Andrieu, Claude Joannis) ou encore l'identification du comportement vibratoire de bâtiments soumis aux séismes (Pierre Argoul, Hamid Afra<sup>(6)</sup>).

Ces techniques font partie d'un ensemble organisé de techniques mathématiques regroupées sous le nom de théorie inverse ou théorie des problèmes inverses. Le but de ces techniques est d'obtenir à partir de mesures indirectes, les informations utiles sur les propriétés du phénomène physique non directement accessibles à l'expérience comme les paramètres du modèle, les conditions aux limites, les défauts.

Parmi les applications plus récentes ou en cours, des techniques inverses au sein du LCPC<sup>(7)</sup>, on peut citer :

- la détection de l'eau dans les gaines de précontrainte externe à partir d'informations de nature capacitive sur le pourtour de la gaine (Frédéric Bourquin, Jean Jaquinta).
- la recherche des paramètres intervenant dans le phénomène de diffusion hydrique dans le béton (Jean-François Seignol)
- la détection et la caractérisation de phénomènes non-stationnaires et non linéaires par l'auscultation dynamique d'ouvrages (Pierre Argoul, Guy Bonnet de l'Université de Marne-la-Vallée)
- la détection de vides dans les câbles de précontrainte (Pierre Argoul, Odile Abraham, Pierre Roenelle)
- le comportement hystérétique de connections acier-béton (assemblages de poutres en béton et de plaques en acier) (Nelly Point, Pierre Argoul, Oreste Bursi de l'Université de Trente)
- le comportement dynamique d'élastomères à basses fréquences avec effet de précharge (Nelly Point, Pierre Argoul, Jean-Luc Dion de l'ISMCM)
- la validation en temps différé de données débitométriques issues de réseaux d'assainissement (Claude Joannis, Farida Hamioud)
- la détection d'objets manufacturés (par exemple panneaux de signalisation) dans des scènes routières (Guillaume Dutilleux)
- la recherche de conditions aux limites de type impédance acoustique qui caractérisent l'absorption des parois de la cavité (Guillaume Dutilleux)
- le comportement dynamique d'un compacteur (engin de chantier) (Pierre-Olivier Vandanjon)
- les plans d'expériences sur les réactions de gonflement interne dans les bétons ou pour les propriétés di-électriques et électriques des bétons hydrauliques et bétons bitumineux (Richard Linder)
- le suivi en continu des évolutions topographiques en environnement littoral par imagerie de résistivité électrique (Sergio Palma Lopes)
- l'inversion de données électriques (développement sous CESAR-LCPC) thèse de Laurent Marescot.

On peut ensuite se référer à l'ouvrage de H.D. Bui<sup>(8)</sup> pour obtenir d'autres exemples de problèmes inverses en génie mécanique et en génie civil et dont la finalité est la détection et la caractérisation soit d'obstacles, ou de cavités, ou de défauts, ou de fissures, ou encore de nappes dans les matériaux ou les structures du génie mécanique ou du génie civil à partir de mesures indirectes. Citons (1) l'utilisation de la diffraction des ondes acoustiques<sup>(9)</sup>, (2) la radiographie par rayons X ou tomographie<sup>(10)</sup>, (3) la thermographie ou la détection photothermique<sup>(11)</sup>, (4) la micro-gravimétrie<sup>(12)</sup> ou encore (5) la diffraction des ondes élastiques<sup>(13)</sup>. On peut citer de façon générale, (6) les techniques d'identification des paramètres dans les lois de comportement par des essais en laboratoire (par exemples au moyens de presse). Finalement, (7) les techniques de vibration inverse permettent l'identification des paramètres mécaniques à partir des réponses dynamiques et le contrôle des vibrations.

---

<sup>6</sup>Hamid Afra, 1991, *Identification du comportement sismique de bâtiments à partir de leurs réponses accélérométriques*, Thèse de doctorat ENPC, 30 / 09 / 1991, ENPC.

<sup>7</sup>Les personnes citées sont, sauf indication contraire, du LCPC (Paris, Nantes, Satory ou Champs/Marne).

<sup>8</sup>H.D. Bui 1993, *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, n°83, Eyrolles.

<sup>9</sup>En médecine, c'est le principe de la tomographie acoustique ou échographie qui utilise la réflexion d'un faisceau d'ultrasons par les organes. En mécanique des matériaux, la tomographie acoustique est utilisée pour la détection d'obstacles solides dans les fluides, l'étude des composites composés d'inclusions solides dans une matrice plus molle ou encore le contrôle du soudage.

<sup>10</sup>La tomographie est utilisée dans le contrôle des matériaux et des structures pour détecter des défauts du soudage, des fissures ou encore des inclusions. Les rayons X conviennent aux matériaux non métalliques (composites et peut-être pour certains aciers ferritiques). On recourt à des rayons plus puissants (rayons  $\gamma$  ou neutrons) pour l'auscultation d'une cuve de réacteur nucléaire de 30 cm d'épaisseur.

<sup>11</sup>La thermographie permet la détection des défauts superficiels dans un conducteur de chaleur solide.

<sup>12</sup>La micro-gravimétrie est utilisée pour la recherche des cavités naturelles ou artificielles, des nappes aquifères ainsi que l'étude de la structure interne des sites archéologiques (par exemple la pyramide Kheops).

<sup>13</sup>La diffraction des ondes élastiques est utilisée pour la recherche des variations internes des propriétés mécaniques des matériaux ou la détection des défauts volumétriques et des fissures.

**Contrôle des structures - Positionnement au LCPC** Le contrôle actif d'ouvrages d'art comme des ponts suspendus ou à haubans a fait aussi depuis une dizaine d'années, l'objet d'études et de recherches au sein du LCPC (dirigées principalement par Frédéric Bourquin). La théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles et la mécanique des milieux continus constituent les fondements de cette démarche.

Plus récemment, le contrôle hybride ou semi-actif des structures dans lequel on fait varier l'amortissement et la rigidité de la structure à l'aide de systèmes appropriés, est à l'étude (F. Bourquin et Guillaume Dujardin) : on cherche à évaluer la faisabilité des versions semi-actives ne nécessitant pas d'actionneur, par exemple à base d'amortisseurs électromagnétiques ou magnéto-rhéologiques. L'intérêt du contrôle semi-actif est d'améliorer considérablement le contrôle passif<sup>(14)</sup> tout en conservant l'indépendance énergétique et la stabilité intrinsèque. Le développement de la théorie et de l'implantation du contrôle semi-actif est encore largement ouvert à la communauté scientifique et technique.

L'application proposée est la mise au point d'un amortisseur à masse accordée ou TMD<sup>(15)</sup>, semi actif et son implantation pour le contrôle multi-mode (balancement+pompage) d'une maquette simplifiée de pont en construction par encorbellement avant son application sur un ouvrage réel.

Plusieurs actions de recherche et de valorisation européennes ont été entreprises depuis deux ou trois ans comme le réseau SAMCO<sup>(16)</sup>, projet CONVIB<sup>(17)</sup>, réseau Smart systems<sup>(18)</sup>.

L'intégration des activités de contrôle au LCPC sera poursuivie dans le cadre du 6ème programme cadre, notamment dans le réseau d'excellence RESET sur les structures intelligentes avec l'université de Strathclyde, dans le projet intégré E-MOI (European Monitoring Initiative) avec Vienna Consulting Engineers et Ispra, et dans le SREP New Road Construction Concepts coordonné par le LCPC. On s'attachera aussi au montage d'un projet RGPU sur le sujet contrôle.

### **Identification et problèmes inverses - positionnement par rapport à l'extérieur :**

Depuis une vingtaine d'années, de nombreux travaux de recherches hors LCPC, en France et à l'étranger ont été menés en théorie inverse. Citons quelques noms : Albert Tarantola<sup>(19)</sup> de l'Université de Paris VI, Philippe Pilvin du LG2M (Lorient) pour l'identification et la caractérisation des matériaux, Marc Bonnet du LMS (Palaiseau) pour l'identification de fissures, le contrôle optimal en plasticité, les méthodes d'équations intégrales, Tykhonov et Morozov<sup>(20)</sup> pour la résolution des problèmes mal-posés, William Menke<sup>(21)</sup> pour l'analyse des données géophysiques et la théorie inverse discrète.

Les méthodes qui sont et pourront être développées au sein de cette opération ne sont pas, à proprement parler, nouvelles mais les applications au génie civil le sont. De plus, l'adaptation et/ou la combinaison des techniques pour traiter un problème inverse du génie civil sont originales.

### **Identification et problèmes inverses - produits finaux visés et moyens de valorisation :**

Nous rappelons que cette opération comporte deux sujets dont les objectifs en termes de production sont différents : un sujet sur l'identification et les problèmes inverses et un sujet sur le contrôle sous la responsabilité de Frédéric Bourquin.

<sup>14</sup>On peut noter que le contrôle passif marche mal lorsque la structure ou l'excitation s'écarte des hypothèses faites lors de la conception du dispositif de contrôle passif (ce qui est généralement le cas).

<sup>15</sup>TMD : Tuned Mass Damper : amortisseur à masse accordée. L'utilisation de TMD est un moyen d'amortissement vibratoire passif largement utilisé de nos jours. Les systèmes TMD consistent en des oscillateurs visqueux (2ème ordre) que l'on ajoute en certains endroits de la structure en vibrations. Le choix correct des paramètres d'un amortisseur TMD va permettre de rajouter de l'amortissement au comportement de la structure au voisinage de l'une de ses fréquences propres.

<sup>16</sup>SAMCO (Structural Assessment Monitoring and Control) est un réseau thématique européen sur le contrôle et la surveillance de l'état des structures subventionné par la Commission Européenne, démarré en octobre 2001 et de durée 48 mois.

<sup>17</sup>CONVIB : Innovative Control Technologies for Vibration Sensitive Civil Engineering Structures (2001-2005) est un programme Scientifique ESF(European Science Foundation) qui est centré sur des concepts innovants tels que le contrôle hybride ou semi-actif de structures industrielles et du génie civil. Son objectif principal est de promouvoir l'utilisation d'installations expérimentales pour l'étude de la réduction des vibrations dans les ouvrages du génie civil au moyen de technologies de contrôle semi-actives innovantes.

<sup>18</sup>Smart systems New materials, adaptative systems and their non linearities. Modelling, control and numerical simulation est un projet financé par le 5ème Programme Cadre qui s'échelonne de novembre 2002 à octobre 2006. Les objectifs scientifiques de la recherche envisagée est de développer des méthodes mathématiques et des outils numériques efficaces pour la modélisation, le contrôle et la simulation numérique.

<sup>19</sup>Citons deux livres : Albert Tarantola, Inverse Problem Theory. Elsevier, 1987 et plus récemment : Klaus Mosegaard and Albert Tarantola, Probabilistic Approach to Inverse Problems, International Handbook of Earthquake & Engineering Seismology, Part A., p 237-265, Academic Press, 2002.

<sup>20</sup>V. Badeva & V. Morozov, 1991, Problèmes incorrectement posés. Théorie et applications en identification, filtrage optimal, contrôle optimal, analyse et synthèse de systèmes, reconnaissance d'images, Masson Paris.

<sup>21</sup>W. Menke, 1989. Geophysical data analysis : Discrete inverse theory, revised version, International Geophysics Series, Vol 45, Academic Press San Diego.

Les techniques inverses comme celles du contrôle évoluent rapidement (citons par exemple les algorithmes évolutionnaires ; les réseaux de neurones, les transformations temps-fréquence, le contrôle semi-actif) et l'utilisation d'une technique ne peut pas se faire sans une bonne connaissance de ses capacités ou de ses limitations. Le sujet sur l'identification et les problèmes inverses ne rentre pas dans le schéma classique d'une recherche dédiée à une application ciblée ; il rentre dans le cadre d'une opération transverse avec une problématique et une démarche communes (résolution d'un problème d'optimisation) et avec diverses applications possibles en génie civil.

Le but premier de ce sujet est **didactique** : mise au clair, diffusion des connaissances à l'intérieur du LCPC, remontée des problèmes rencontrés pour tenter de les solutionner.

Les principaux produits finaux visés sont doubles :

- rédaction et publication d'un ouvrage collectif de synthèse
- organisation de séminaires de formation et d'information sur les problèmes inverses.

L'ouvrage à rédiger fera un état de l'art sur différentes techniques inverses utilisées au LCPC et sur les applications de ces méthodes au Génie Civil. Cet ouvrage devra être accessible au plus grand nombre ; il sera structuré en essayant de donner les liens entre les différentes techniques ; on présentera quelques applications au Génie Civil des différentes méthodologies inverses précédemment décrites. On tentera aussi de donner un arbre décisionnel pour le choix d'une technique vis à vis d'une autre. Une importance particulière sera accordée à la perception par l'utilisateur de la ou des méthode(s) inverses employée(s).

Finalement, les produits du sujet identification et problèmes inverses pour cette opération, à savoir séminaires et ouvrage de synthèse, permettront aux futurs utilisateurs, une meilleure connaissance et par conséquent, une meilleure utilisation des méthodes d'identification et de contrôle. Pour ceux qui développent de nouvelles approches, cette opération permettra une prise de conscience plus aiguë de la démarche inverse et des idées innovantes. Enfin pour tous, elle pourra enfin nous conduire à avoir, pour le problème à résoudre, des idées audacieuses et originales.

### Identification et problèmes inverses - principaux intervenants du LCPC et des CETE :

Plusieurs chercheurs et doctorants du LCPC ont été sollicités. La liste de ces chercheurs est donnée dans les tableaux. On note que la majorité des chercheurs sollicités a répondu de façon positive lors du montage de cette opération mais pour certains avec une attitude plutôt réservée. Parmi les services concernés, on note principalement : le LAMI (Champs) avec 9 chercheurs dont trois doctorants, le service MI (Paris et Nantes) avec 4 chercheurs, la division RMS Nantes 4 chercheurs dont un doctorant, 2 chercheurs du LRPC Strasbourg, 1 chercheur de FDOA Paris.

Au niveau national, les actions de Marc Bonnet<sup>(22)</sup> du LMS et de Michele Sebag<sup>(23)</sup> sur les problèmes inverses ainsi que celles menées par Fabrice Thouverez et Louis Jézéquel du LTDS<sup>(24)</sup> (ECL Lyon) seront suivies et les responsables seront sollicités et invités lors de réunions.

Sur l'identification modale et son extension au cas non linéaire, plusieurs collaborations au niveau national existent et seront poursuivies respectivement avec l'équipe de Claude Lamarque et de Claude Boutin du LGM<sup>(25)</sup>

<sup>22</sup>Thèmes et sujets abordés dans l'opération de recherches Optimisation et problèmes inverses, dirigée par Marc Bonnet au LMS :

- *Nouvelles approches de l'optimisation* (1) Algorithmes optimaux d'évolution artificielle et (2) Conception optimale en rayonnement acoustique des structures.
- *Identification de fissures ; problèmes de type contrôle non destructif* (1) Identifiabilité exacte en mécanique de la rupture et de l'endommagement et (2) Méthodes d'équations intégrales, analyse de sensibilité.
- *Identification de grandeurs distribuées* (1) Contrôle optimal en plasticité, (2) Identification des mécanismes dissipatifs des structures parasismiques et (3) Recalage de modélisations
- *Identification de paramètres de comportement* (1) Micro-indentation, (2) Identification non paramétrique de modèles rhéologiques.
- *Problèmes industriels d'optimisation, autres applications* (1) Applications de l'apprentissage et des systèmes experts.

<sup>23</sup>M. Sebag s'intéresse aux algorithmes d'évolution, aux algorithmes génétiques, à la programmation génétique et aux stratégies d'évolution. Plus précisément, ses contributions s'intéressent aux explorations du couplage apprentissage et évolution (apprentissage de règles, de distributions pour guider l'évolution), à l'utilisation de connaissances a priori (grammaires) pour guider la recherche (applications en problèmes inverses et identification non paramétrique de lois de comportement mécanique).

<sup>24</sup>Les activités de recherche du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) sont structurées en trois thèmes rassemblant chacune trois équipes de Recherche : thème 1 : "*Tribologie et Surfaces*", thème 2 : "*Surfaces et Milieux Hétérogènes*" et thème 3 : "*Dynamique des Structures et Mécanismes*". Le thème 3, plus proche de mes centres d'intérêt, s'intéresse à la prédiction, à la mesure et au contrôle actif du comportement vibratoire de systèmes mécaniques complexes. Il cherche à analyser leur contenu spectral et à en déduire l'origine et les conséquences des sollicitations. Il est composé des équipes de recherche suivantes : (1) équipe *Mécanismes*, (2) équipe *Dynamique des Structures et des Systèmes* et (3) équipe *Fiabilité et Maintenance*.

<sup>25</sup>Les recherches développées au Laboratoire Géomatériaux (LGM) s'articulent autour de deux axes : (1) comportement des géomatériaux et (2) structures et ouvrages du génie civil. Le second axe plus proche de mes centres d'intérêt, traite de la conception et du dimensionnement des "structures et ouvrages du génie civil" ainsi que des méthodes d'auscultation.

(Lyon) et aussi l'équipe de Philippe Leconte et Pascal Lubrina du Département Dynamique des Systèmes Couplés de l'ONERA. Au niveau international, les collaborations avec Jean-Claude Golinval de l'Université de Liège et Luigi Garibaldi du Politecnico de Turin déjà établies pendant le COST F3 (1997-2001)<sup>(26)</sup> seront poursuivies sur l'identification des structures en dynamique non linéaire.

### estimation des temps passés sur la période

L'estimation des temps passés pour le sujet Identification et problèmes inverses a été calculée à l'aide des deux tableaux (dernière colonne) donnés en annexe. Elle peut être décomposée pour l'année 2004 comme suit : chercheurs : 47 homme mois ; doctorants : 30 homme mois soit un total de 77 h mois par an. Ce chiffre devrait être à peu près reconductible pour les deux années suivantes.

Sujets	Laboratoires	Contenu	hm/an
Identification et problèmes inverses	LAMI,RMS, LRPC Strasb., FDOA, MI, TGCE	Rédaction d'un ouvrage de synthèse, Organisation de formations	77
Contrôle	MI		
		TOTAL	77

### estimation des moyens techniques et financiers nécessaires

1. Moyens demandés (financement LCPC) pour chaque année :

Labo demandeur	demande	coût (k euros)
LRPC	3 à 4 AM	
	2 à 3 étudiants en stages de DEA	5
	Accueil de professeurs étrangers	5

2. Moyens demandés sur la période de 4 ans

- Financement d'une thèse
- Informatique Scientifique (moyens de calcul) :15k euros
- Organisation de la journée (invitation d'orateurs extérieurs, frais de secrétariat) : 2 k euros
- Aide à l'organisation du colloque : 5 k euros
- Frais de publication de l'ouvrage : 6 k euros

## B Extension des notions d'analyse modale en dynamique non linéaire

### B.1 Problématique

La majorité des techniques classiquement utilisées pour l'analyse des structures en dynamique repose sur l'hypothèse du comportement linéaire et plus précisément sur le principe de superposition linéaire. Ce principe, fondement de l'analyse modale, exprime la réponse de la structure en vibrations libres ou forcées comme la superposition des réponses modales à partir de jeux arbitraires de conditions initiales. Dans l'approche vibratoire classique pour l'étude des systèmes dynamiques linéaires conservatifs et non conservatifs, le calcul des vibrations normales se réduit donc au calcul des fréquences propres et des modes normaux associés qui sont respectivement les valeurs et les vecteurs propres de transformations linéaires. Les modes fournissent une base de projection adaptée pour ses propriétés d'orthogonalité et sont actuellement en passe de devenir un concept incontournable en dynamique des structures.

<sup>26</sup>Le COST F3 "Structural Dynamics" est une action COST *European Co-operation in the Field of Scientific and Technical Research* qui a démarré le 25 Juin 1997 et s'est terminé le 24 Juin 2001. Son principal objectif est d'augmenter les connaissances nécessaires pour améliorer la conception, la fiabilité mécanique et la sûreté des structures dans le domaine de la dynamique des structures linéaires et non linéaires. Les actions de recherche du COST F3 sont divisées en trois équipes de travail s'intéressant respectivement à : (1) Méthodes de recalage de modèles Eléments Finis (Finite element model updating methods), (2) Surveillance vibratoire et détection de l'endommagement (Health monitoring and damage detection) et (3) Identification de systèmes linéaires (Identification of non-linear systems).



Bien que les modèles linéaires pour le comportement des ouvrages du génie civil aient fait la preuve de leur utilité, la plupart des structures montrent souvent, un certain niveau de comportement non linéaire qui peut être dû soit aux caractéristiques dynamiques non linéaires des joints de structure, soit aux conditions aux limites, soit aux propriétés des matériaux. Bien plus, la demande accrue de performances pour les systèmes mécaniques, en termes de fiabilité mécanique, de légèreté, de capacité de charge, vitesse, sécurité, etc... entraînent que les effets non linéaires qui n'étaient pas pris en compte dans les projets de structures dans le passé, aujourd'hui doivent être modélisés. Négliger les effets non linéaires peut entraîner une grande différence entre le comportement réel de la structure et le comportement estimé par le modèle. On peut citer l'exemple des structures minces auxquelles l'industrie fait de plus en plus appel, en les soumettant à des contraintes de plus en plus fortes et dont les amplitudes de vibration peuvent atteindre très rapidement des valeurs importantes.

D'un point de vue strictement théorique, l'approche par l'analyse modale traditionnelle aussi bien que le principe de superposition linéaire deviennent inapplicables dans le cas non linéaire. On rappelle que l'un des objectifs premiers de l'analyse modale est d'établir et de vérifier, à partir de la donnée de mesures d'essais vibratoires, un modèle mathématique acceptable pour le comportement dynamique de la structure étudiée<sup>(27)</sup>. De part de sa nature non linéaire, le modèle mathématique n'est plus unique et dépend de l'amplitude de la vibration. Il est possible d'étendre cet objectif au cas de structures pour lesquelles les effets non linéaires deviennent significatifs et ne peuvent plus être négligés. On peut alors conserver la terminologie d'analyse modale non linéaire même si en toute rigueur mathématique, les termes de modes et de superposition modale ne sont plus corrects pour l'analyse non linéaire.

Il devient quasiment impossible de prédire analytiquement l'existence de non-linéarités, ni de quantifier leur degré. Après avoir établi quelles pouvaient être les sources des non-linéarités, la mise au point d'essais vibratoires réels et le dépouillement des données deviennent alors essentiels pour détecter et localiser la présence de non-linéarités et aussi pour quantifier leur degré et finalement pour identifier leurs caractéristiques dynamiques. Le choix de la technique d'excitation (type, position et amplitude de l'excitation, emplacement des capteurs de réponses de la structure, etc) est délicat et doit être en accord avec le traitement et l'analyse qui suivent.

Les questions ouvertes dans l'analyse modale étendue au cas non linéaire sont nombreuses. Par exemple :

- Dans quel sens peut-on étendre le concept de l'analyse modale au cas non linéaire ; en particulier, le concept de fonction de réponse en fréquence et le concept de modes normaux ?
- Comment extraire les informations des signaux ? Existe-t-il une approche générale, ou bien, au contraire, chaque type de non linéarité demande-t-elle une approche spécifique ?
- Pouvons nous associer à une certaine non linéarité, un certain type de vibration ? Quand cela est-il possible ?
- Quelles sont les conditions expérimentales optimales pour extraire le plus d'informations pour un certain type de non linéarité ?

## B.2 Nouveau sujet de thèse

Dans le cadre du projet fédératif de recherches de l'Institut Navier auquel le LAMI est rattaché, plusieurs groupes ont été constitués fin 2002, autour de thématiques transversales à l'Institut<sup>(28)</sup>. Dans le groupe "Dynamique et vibrations" animé par Denis Duhamel et auquel j'appartiens, un sujet de thèse qui pourrait démarrer en 2003-2004, a été proposé par Guy Bonnet et moi-même. Le titre de cette thèse est : *Réduction de modèles en dynamique non linéaire de systèmes mécaniques couplés. Application à l'interaction sol-structure et à la sismique des ouvrages.*

<sup>27</sup>Citons les propos du professeur D.J. Ewins : "Modal testing is the process of constructing a mathematical model to describe the vibrations properties of a structure based on test data, rather than a conventional theoretical analysis." , tirés de son ouvrage "Modal Testing : Theory and Practice" publié en 1986, chez Research Studies Press (England) pour Brüel & Kjaer, ou encore ceux-ci : "Modal analysis is primarily a tool for deriving reliable models to represent the dynamics of structures." provenant du livre plus récent : "Theoretical and Experimental Modal Analysis" écrit par de multiples auteurs Maia, Silva, He, Lieven, Lin, Skingle, To et Urgueira et publié en 1997, chez Research Studies Press Ltd (England).

<sup>28</sup>Cinq groupes rassemblant entre cinq et sept chercheurs des différents laboratoires de l'Institut Navier, ont été créés : (1)Structures et matériaux renforcés, (2)Suspensions, milieux granulaires et sols grossiers, (3)Dynamique et vibrations, (4)Interfaces et adhésion et (5)Couplages chimico-thermo-hydrauliques dans les géomatériaux et animés respectivement par : (1)P. de Buhan (LM-SGC), (2)J. Canou (CERMES) et P. Reiffsteck (MSRGI), (3)D. Duhamel (LAMI), (4)Q. Hé (LaM) et (5)Y.-J. Cui (CERMES) et G. Thévenin (LaM). Les enjeux de ces groupes sont doubles : (1)obtenir des bourses de thèses autour des cinq thématiques, des trois organismes de tutelle en liaison avec le comité de direction de l'Institut (échéance février-mars 2003), (2)élaborer un projet scientifique global avec demande de moyens auprès du Ministère de la Recherche (échéance mi-avril 2003).

Une des motivations fortes de ce projet de thèse est de tenter de trouver une réponse aux questions énoncées précédemment sur l'analyse modale non linéaire. De plus, durant ma carrière professionnelle, j'ai souvent assisté, participé à des essais en laboratoire mais je n'ai jamais été le maître d'oeuvre. Cette recherche sera aussi l'occasion de "mettre les mains à la pâte" !

On propose quelques expérimentations de laboratoire, sur des poutres non linéaires ou des joints réglables ou, encore, des systèmes avec frottement, pour vérifier les capacités de telle ou telle méthode appliquée aux systèmes réels<sup>(29)</sup>. Il est aussi envisager de vérifier, au moyen de simulations numériques, l'effet des non linéarités et celui d'excitations diverses (en type et en niveau) et la capacité de discrimination de chacune des techniques étudiées.

Voici la présentation de ce nouveau sujet de thèse qui s'inscrit dans une thématique de recherche du groupe "Dynamique" de l'Institut Navier.

### **B.2.1 Contexte**

Les modélisations actuelles pour l'interaction sol-structure considèrent une structure linéaire déterministe couplée avec un sol non-borné, linéaire et déterministe et l'analyse dynamique de tels modèles déterministes est aujourd'hui maîtrisée. Les effets du sol sur la structure sont pris en compte par une impédance de bord sur l'interface sol-structure. Cette impédance de bord est construite en prenant en compte les propagations d'ondes dans le sol non borné. On procède ainsi à une réduction du modèle dynamique du sol sur la structure. La réduction du modèle dynamique de la structure est effectuée usuellement par une méthode de sous-structuration dynamique basée sur l'analyse modale. Pourtant ces modèles demeurent trop simplifiés pour bien modéliser les effets du sol sur la structure en dynamique. En effet, le comportement du sol est généralement fortement non-linéaire, alors que la réduction du modèle utilise des impédances représentant un modèle linéaire. Par ailleurs, à niveau élevé de séisme, il est possible que la structure décolle partiellement de sa fondation, ce qui induit une non-linéarité géométrique si l'on veut représenter convenablement le comportement de l'interface sol-structure. L'application visée est l'interaction sol-structure avec des non-linéarités de sol localisées au voisinage de la structure, dans le cadre des analyses du risque sismique. Plus précisément, le sujet de cette thèse concerne l'analyse dynamique et l'identification de systèmes mécaniques constitués d'un milieu borné linéaire couplé (ouvrage) à un milieu non borné localement non linéaire (sol+fondation). On cherchera à étendre : les notions de modes propres ou normaux et de fonctions de réponse en fréquence en dynamique linéaire au cas de la dynamique non linéaire pour des systèmes linéaires couplés à une impédance de bord non linéaire. L'extension de la notion de modes se fait généralement en étudiant les solutions périodiques synchrones des équations non linéaires du mouvement. Les méthodes d'identification modale basées sur les notions de modes propres et de fonctions de réponse en fréquence au cas des systèmes linéaires couplés à une impédance de bord non linéaire. la réduction de modèle en sous-structuration dynamique au cas d'une sous-structure linéaire avec "impédance de bord non linéaire". L'étude proposée se veut autant théorique qu'expérimentale. Pour les essais en laboratoire, on utilisera des systèmes simples constitués de poutres ou des plaques pour modéliser la structure et des élastomères ou des matériaux de sol pour modéliser le sol. Plusieurs régimes de vibration seront analysés : vibrations libres et forcées.

### **B.2.2 Objectifs**

1. Développement de modèles en dynamique non linéaire pour des systèmes mécaniques constitués d'un milieu borné linéaire, déterministe ou aléatoire, couplé avec un milieu non borné, localement non linéaire, déterministe ou aléatoire. Ces modèles devront permettre de reproduire les phénomènes expérimentalement établis.
2. Développement de méthodes d'identification expérimentale (applicable en laboratoire et en situ) adaptées pour les systèmes linéaires couplés à une impédance de bord non linéaire.

### **B.2.3 Programme des travaux**

1. Formulation générale des équations de la dynamique de systèmes mécaniques constitués d'un milieu borné linéaire couplé (ouvrage) à un milieu non borné localement non linéaire (sol+fondation).
2. Conception et réalisation d'essais en laboratoire sur des corps d'épreuves mécaniques "simplifiés" et représentatifs de la recherche menée : par exemple, structure élancée de type poutre soit encastree dans un massif par l'intermédiaire d'une liaison avec une rigidité non linéaire, soit encastree dans un massif non linéaire de type élastomère. Identification des propriétés de la liaison ou du massif. Identification des propriétés de la structure élancée en condition libre-libre. Construction de réponses expérimentales du système couplé soumis à des excitations extérieures diverses.

---

<sup>29</sup>On prévoit la possibilité d'utiliser cet essai pour préparer des T.P. pour l'enseignement à l'ENPC (projet de 1ère année ou cours de 2ème année contrôle des vibrations).

3. Analyse d'une méthode de réduction de modèles qui étend le concept de modes propres ou normaux défini en théorie vibratoire linéaire au cas non linéaire. L'objectif est d'obtenir des modèles qui restent quantitativement valables assez loin de la position d'équilibre.
4. Analyse dynamique d'une sous-structure couplée avec une impédance de bord non linéaire. On testera plusieurs types de non-linéarités (polynômiales, frottement sec, etc. ).
5. Développement d'une méthodologie pour l'identification expérimentale des propriétés dynamiques de la structure en présence de son appui non-linéaire, à l'aide de mesures effectuées en tâche 2 sur la structure couplée avec le massif.
6. Validation de la méthode d'identification expérimentale par comparaison avec les résultats des mesures effectuées en laboratoire. On pourra aussi appliquer cette méthode aux réponses de modèles réduits de bâtiments testés en centrifugeuse (Jean-Louis Chazelas du LCPC à Nantes) et aux réponses de bâtiments réels sous excitations de chocs ou sous excitations harmoniques (Claude Boutin du Laboratoire Géomatériaux à Lyon).

## C Identification de modèles de structures en dynamique non linéaire

### C.1 Problématique

Dans un essai de vibrations de structure, on enregistre les réponses vibratoires en un certain nombre de points de la structure par des capteurs placés si possible, de manière optimale et on analyse ensuite les signaux ainsi obtenus. Dans le cas de comportements linéaires, les techniques d'extraction des informations contenues dans les réponses vibratoires sont efficaces et très fiables. Durant ces dix dernières années, des progrès ont été faits pour la détection, la caractérisation, l'identification et la localisation des non linéarités ; ces techniques sont basées sur l'analyse de mesures de caractéristiques dynamiques entrées/sorties pour des structures réelles. Elles sont très différentes entre elles, avec des résultats qui ne sont satisfaisants que dans certains cas particuliers. En conséquence, pour ce qui concerne le comportement non linéaire, il n'existe pas encore de technique applicable au niveau industriel pour résoudre le problème de l'identification des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Parmi les méthodes d'identification disponibles en dynamique non linéaire, quelles soient paramétriques et non paramétriques, on peut citer l'utilisation du développement en séries de Wiener ou de Volterra, les méthodes NARMAX, dérivées par évolution des modèles ARMA et présentées au premier chapitre, de la méthode Reverse Path, dans sa version Conditioned<sup>(30)</sup>, dans le domaine fréquentiel, la méthode Restoring Force Mapping pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté ou encore une nouvelle méthode paramétrique, nommée NIFO<sup>(31)</sup>. Chacune de ces méthodes possède, à la fois, des avantages et des désavantages qui dépendent du système à l'étude. L'état d'avancement de la recherche dans le domaine des systèmes à plusieurs degrés de liberté non linéaires est cependant encore à ses débuts. Par exemple, la possibilité de *quantifier* une non-linéarité associable à un certain état d'endommagement local par les techniques d'analyse des signaux n'est pas encore acquise. De même, la détection de la *présence* des non-linéarités ou leur *localisation spatiale* dans la structure sont des problèmes dont la solution demande encore beaucoup d'efforts de recherche. Les méthodes d'identification déjà citées doivent être encore améliorées et étendues à différents types de non-linéarités et de sollicitations.

### C.2 Opération dans le cadre de la communauté européenne - FP6 -

Dans le cadre du 6ème programme cadre (Sixth Framework Programme), une expression d'intérêt de type Projet Intégré (Expression of Interest for an Integrated Project), intitulée "Non-linear Phenomena in Modal Survey Testing" (NOLMOST) proposée à la Commission Européenne en juillet 2002 dans l'intention d'une action future au sein du prochain 6ème programme cadre. Les protagonistes de cette expression d'intérêt n'ont pas proposé pour début 2003 (premier appel) de projet finalisé et sont en train de préparer un STREP<sup>(32)</sup> pour 2004. L'industrie aérospatiale européenne est en train de faire un grand bond en avant avec le développement d'une nouvelle génération d'avions : la famille des Airbus A380. Ce projet permettra de réunir les experts européens dans l'analyse modale et les problèmes non linéaires d'un point de vue de la dynamique des structures. Son but est d'améliorer de façon qualitative et quantitative, les techniques d'identification des caractéristiques non linéaires des structures aérospatiales. Ce projet a été préparé par le Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Institut für Aeroelastik en collaboration avec les sept organismes européens suivants : (1) Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales (ONERA), Département DDSS/AE, (2) University of Manchester, School of Engineering, Dynamics and Aeroelasticity Research Group, (3) University of Kassel, Institute for Lightweight Structures, (4) Airbus France, Section EGLT, (5) Airbus Germany, Section EDD, (6) LAMI (Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (7) LTAS-Vibrations and Structural Identification, University of Liège et (8) Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Torino.

<sup>30</sup>C.M. Richards & R. Singh, 1998. Identification of multi-degree-of-freedom non linear systems under random excitations by the "reverse path" spectral methods, Journal of Sound and Vibration, Vol. 213, pp. 673-708.

La CRP méthode recherche à construire un ensemble de composants non corrélés dans la réponse fréquentielle. Elle permet d'estimer les coefficients des non linéarités locales situées loin des points d'application des forces appliquées et aussi la matrice de compliance (inverse de l'impédance) dynamique linéaire quand le nombre des points des forces d'excitation est inférieur à celui des points de mesure. Malheureusement, la CRP méthode demande des temps de calcul informatique importants, en particulier lorsque plusieurs termes non linéaires sont présents dans le modèle.

<sup>31</sup>NIFO : Nonlinear Identification through Feedback of the Output. Citons l'article de D.E. Adams & R.J. Allemang, 2000. A frequency domain method for estimating the parameters of a non-linear structural dynamic model through feedback, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 14 no 4, pp 637-656.

Cette nouvelle technique interprète les non-linéarités dans le domaine de Fourier comme des forces internes non mesurées vues comme rétroactives par rapport au modèle linéaire sous-jacent du système étudié. Le point d'achoppement de cette procédure est le "mauvais" conditionnement de la matrice reliant le vecteur des réponses de la structure mesurées et celui contenant à la fois les forces appliquées et les forces internes rétroactives dues aux non-linéarités.

<sup>32</sup>STREP : Specific targeted research projects

cf. [http://europa.eu.int/comm/research/fp6/instruments\\_en.html](http://europa.eu.int/comm/research/fp6/instruments_en.html)

Le contenu de ce projet est divisé en trois parties : (1) détection et caractérisation qualitative, (2) quantitative identification et (3) modélisation mathématique des non-linéarités.

Concernant la détection et la caractérisation des non linéarités, les méthodes actuelles devront être adaptées pour être étendues aux systèmes à plusieurs degrés de liberté. On peut citer par exemple, les méthodes s'appuyant sur :

(1) les tracés d'impédance, (2) les distorsions dans le plan de Nyquist, (3) les tracés des fonctions de cohérence, (4) la transformation de Hilbert, (5) les transformations temps-fréquence, (6) les techniques d'estimation d'erreur au sens des moindres carrés dans les domaines fréquentiel et temporel. On espère de ces méthodes qu'elles fournissent un moyen de classification des modes mesurés en plusieurs catégories suivant le degré des effets non-linéaires et du couplage non linéaire. Suivant la nature des modes, une procédure adaptée pour l'identification quantitative pourra alors être mise au point. Les catégories pourront être parmi : (1) modes normaux linéaires, (2) modes influencés par les effets non linéaires, mais ne montrant aucun couplage significatif avec les autres modes et (3) modes influencés par les effets non linéaires, mais avec la présence de couplage non linéaire avec les autres modes. Evidemment, on pourra faire intervenir d'autres catégories ; par exemple, la catégorie des modes linéaires pourra être divisée en la sous-catégorie des modes couplés par l'amortissement et celle des modes non couplés par l'amortissement (hypothèse de Basile).

La partie principale du projet porte sur l'identification quantitative des non-linéarités lors d'essais de surveillance modale. Avant d'implémenter la procédure retenue lors de l'étude dans un logiciel standard, de nombreux développements sont nécessaires :

- Mise au point de l'essai et vérification des directives pour le signal d'excitation qui sera utilisé dans le processus d'identification, en rapport avec le degré de la non linéarité présente : (1) signaux harmoniques (méthode de la résonance de phase ou excitation sinusoïdale par morceaux), (2) signaux périodiques (excitation à plusieurs sinus) ou signaux transitoires (excitation à balayage sinus et aléatoire).
- Vérification de l'influence des non-linéarités sur les outils de traitement des signaux standards pour l'estimation des fonctions de réponses en fréquence et sur l'identification des paramètres modaux tels que les fréquences propres, les coefficients d'amortissement modaux, la forme des modes et les masses généralisées. Vérification des possibilités de détecter les non linéarités avec une utilisation potentielle des parties sur-harmoniques de la réponse.
- Etudier et mettre au point des modèles adéquats pour le processus d'identification de non-linéarités pour des structures complexes de grande taille comme un avion, par exemple en utilisant un modèle modal pour réduire la taille du système avec des termes supplémentaires pour prendre en compte les composants non linéaires, ou encore des modèles physiques mixtes modaux pour prendre en compte des non-linéarités localisées.
- Les modèles devront être évalués au vue de leur applicabilité aux procédures de recalage. La taille du modèle devra être aussi réduite que possible pour permettre une interprétation facile des résultats. La stratégie de modélisation doit considérer l'utilisation postérieure habituellement d'un modèle élément fini, pour le contrôle du battement, les calculs de cycle limite, et dans le processus de recalage du modèle mathématique.

Jusqu'à la fin du projet, un essai de vibration au sol sur un avion sera effectué pour prouver l'applicabilité des outils développés dans un contexte industriel. Le modèle mathématique retenu sera recalé pour prendre en compte les caractéristiques non linéaires de la structure spécimen retenue pour l'essai.

### C.3 Annexe

Tableaux des chercheurs sollicités pour l'opération.

chercheurs	labos	tel	adresse mel	Pt	hm
Odile ABRAHAM	RMS Nantes	02 40 84 59 18	odile.abraham@lcpc.fr	86	1
Amina ALAOUI	LAMI Champs	01 64 15 37 30	alaoui@lami.enpc.fr	44	2
Hervé ANDRIEU	EAU Nantes	02 40 84 58 77	herve.andrieu@lcpc.fr	83	
Pierre ARGOUL	LAMI Champs	01 64 15 37 24	argoul@lami.enpc.fr	44	10
Frédéric BOURQUIN	MI Paris	01 40 43 54 58	frederic.bourquin@lcpc.fr	15	
Jean-Marie CAUSSIGNAC	MI Paris	0140435128	jean-marie.caussignac@lcpc.fr	15	
Christian CREMONA	FDOA Paris	01 40 43 53 44	christian.cremona@lcpc.fr	39	
Pierre CHARBONNIER	LRPC Strasbourg	03 88 77 46 44	Pierre.Charbonnier@equipement.gouv.fr		1
François CHEVOIR	LMSGC Champs	01 40 43 54 78	francois.chevoir@lcpc.fr	24	
Philippe COTE	RMS Nantes	02 40 84 59 09	philippe.cote@lcpc.fr	86	1
Louis-Marie COTTINEAU	MI Nantes	02 40 84 58 88	louis-marie.cottineau@lcpc.fr	81	
François DERKX	MI Paris	01 40 43 51 84	francois.derkx@lcpc.fr	15	
Denis DUHAMEL	LAMI Champs	01 64 15 37 28	duhamel@lami.enpc.fr	44	1
Guillaume DUTILLEUX	LRPC Strasbourg	03 88 77 46 27	Guillaume.Dutilleux@equipement.gouv.fr		4

#### *Signification des sigles utilisés*

CETE : Centre d'Etudes Techniques de l'Equipement

LRPC : Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées

LIVIC : Laboratoire sur les Interactions Véhicules-Infrastructure-Conducteurs.

LMSGC : Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil

LAMI : Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification

DG : Direction Générale - LCPC

EAU : Division Eau - LCPC

MI : Service Métrologie et Instrumentation - LCPC

RMS : Division Reconnaissance et Mécanique des Sols - LCPC

TGCE : Division Technologies du Génie Civil et Environnement - LCPC

Sébastien GERVILLERS	LAMI Champs	01 64 15 37 36	gerville@lami.enpc.fr (doctorant 3ème année)	44	10
Alex HUYNH	LAMI Champs	01 64 15 37 05	huynh@lami.enpc.fr (doctorant 2ème année)	44	
Jean IAQUINTA	MI Paris	01 40 43 51 35	jean.iaquinta@lcpc.fr	17	2
Richard LAGABRIELLE	DG Nantes	02 40 84 59 07	richard.lagabrielle@lcpc.fr	69	1
Charles-Eric LEMAIRE	TGCE Nantes	02 40 84 57 41	charles-eric.lemaire@lcpc.fr (doctorant)	72	10
Thien-Phu LE	LAMI Champs	01 64 15 37 36	le@lami.enpc.fr (doctorant 3ème année)	44	10
Richard LINDER	LAMI Champs	01 64 15 37 09	linder@lami.enpc.fr	44	10
Morgan MANGEAS	LIVIC Satory	01 40 43 29 09	morgan.mangeas@inrets.fr	29	
Laurent MARESCOT	RMS Nantes		laurent.marescot@lcpc.fr (doctorant)	87	10
Joao-Sergio PALMA-LOPES	RMS Nantes	02 40 84 59 12	sergio.lopes@lcpc.fr	86	2
Jean-Michel PIAU	DG Nantes	02 40 84 58 28	jean-michel.piau@lcpc.fr	65	
Nelly POINT	LAMI Champs	01 64 15 37 40	point@lami.enpc.fr	44	5
Jean-François SEIGNOL	FDOA Paris	01 40 43 53 40	seignol@lcpc.fr	34	2
Pierre-Olivier VANDANJON	TGCE Nantes	02 40 84 56 34	pierre-olivier.vandanjon@lcpc.fr	72	1
Honoré YIN	LAMI Champs	01 64 15 37 25	yin@lami.enpc.fr	44	4



## Références bibliographiques personnelles

Mémoires de DEA et de Thèse

# Bibliographie

- THE1. P. Argoul, **1984**. Méthode d'Identification de Cauchy-Weierstrass : Application des transformées intégrales à l'identification linéaire des structures., DEA Ecole Centrale de Lyon, 76 pages.
- THE2. P. Argoul, **1990**. Identification des Structures Vibrantes., Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 283 pages.
- THE3. P. Argoul, **2003**. Quelques réflexions sur l'identification des paramètres en dynamique des matériaux et des structures. Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard, Lyon I.

## Edition d'ouvrages et contribution à des ouvrages

# Bibliographie

- LIVR1. P.Y. Bard, H. Afra & P. Argoul, **1992**. *Dynamic Behaviour of Buildings : Experimental Results from Strong Motion Data.*, participation à un ouvrage collectif : Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Avril 1992, V. Davidovici (ed.), Ouest Editions, IV-6, pp 441-477.
- LIVR2. P. Argoul, M. Frémond & Q.S. Nguyen (Edts), **1997**. *IUTAM Symposium on Variations of Domains and Free-Boundary Problems in Solid Mechanics.*, Proc. of the IUTAM Symposium held in Paris, France, Solid Mechanics and its Applications, 22-25 April, Vol. 66, Kluwer Academic Publishers.
- LIVR3. P. Argoul & T-P. Le, **2003**, *Wavelet analysis of transient signals in civil engineering*, participation à un ouvrage collectif : Novel approaches in civil engineering, M. Frémond, F. Maceri Editors, Springer Publishers, pp 311-318.
- LIVR3. P. Argoul & S. Erlicher, **2005**, *On the use of continuous wavelet analysis for modal identification*, participation à un ouvrage collectif, M. Frémond, F. Maceri Editors, Springer Publishers.

## Articles dans des revues à comité de lecture

# Bibliographie

- ARTI1. L. Jézéquel & P. Argoul, **1986**. *A New Integral Transform for Linear Systems Identification*, Journal of Sound and Vibration, Vol 111, N°2, pp 261-278.
- ARTI2. P. Argoul & L. Jézéquel, **Sept 1989**. *Improvement of a nonparametric identification procedure used in nonlinear dynamics.*, Journal of Applied Mechanics, Vol 56, pp 697-703.
- ARTI3. H. Afra & P. Argoul, **1990**. *Identification du comportement sismique des bâtiments et comparaison avec les données réglementaires.*, Annales des Ponts et Chaussées, Vol N° 53-54, pp 50-65.
- ARTI4. F.J. Ulm, J. L. Clément, H. Afra & P. Argoul, **1993**. *Frequenzverlust und kritische Dämpfung im Bruchzustand : Stahlbetonkonstruktionen unter dynamischen Lasten.*, Bauingenieur 68, pp 183-190.
- ARTI5. M. Said & P. Argoul, **1995**. *Identification du comportement instationnaire de bâtiments soumis aux séismes.*, Annales de l'I.T.B.T.P., Vol 531, pp 43-63.
- ARTI6. P. Argoul, **1997**. *Linear dynamical identification : an integral transform seen as a complex wavelet transform*, Meccanica, Vol 32, pp. 215-222.
- ARTI7. P. Argoul, H.P. Yin & B. Guillermin, **1998**. *Utilisation de la transformation en ondelettes pour le traitement de signaux mécaniques*, Mécanique Industrielle et Matériaux -Revue du GAMI, Vol 51, N° 4, pp 194-197.
- ARTI8. H.P. Yin & P. Argoul, **1999**. *Transformations intégrales et identification modale.*, C. R. Acad. Sci. Paris, Elsevier Paris, t. 327, Série II b, pp. 777-783.
- ARTI9. P. Argoul & T-P. Le, **2003**. *Instantaneous indicators of structural behaviour based on the continuous Cauchy wavelet transform.*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 17, pp. 243-250.
- ARTI10. J.C. Golinval, G. Kerschen, V. Lenearts, F. Thouverez & P. Argoul, **2003**. *Working group 3 - Identification of non-linear systems et Conclusions*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 17, pp. 177-178 et pp. 251-254.
- ARTI11. M. Munoz, P. Argoul & F. Farges, **2003**. *Continuous Cauchy wavelet transform analyses of EXAFS spectra : A qualitative approach.*, American Mineralogist, An International Journal of Earth and Planetary Materials, Vol 88, N°4, pp. 694-700.
- ARTI12. H.P Yin, D. Duhamel & P. Argoul, **2004**. *Natural frequencies and dampings estimation using wavelet transform of frequency response function*, Journal of Sound and Vibration, accepté pour publication.
- ARTI13. T-P. Le & P. Argoul, **2004**. *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*, Journal of Sound and Vibration, Vol 277, pp. 73-100.

## Colloques avec actes

# Bibliographie

- CONF1. A. Randriamanpianina, P. Bontoux, R. Roux & P. Argoul, **1985**. *Multistep methods for spectral Tau-Chebyshev approximation. Application to rotating and buoyancy driven internal flows.*, VI<sup>ème</sup> GAMM Conf. on Num. Meth. in Fluid Mechanics, September, DFVLR Göttingen, RFA.
- CONF2. P. Argoul, **1987**. *Une méthode d'identification des structures non-linéaires en dynamique.*, 8<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Septembre, Nantes.
- CONF3. P. Argoul, **1987**. *Identification des structures non-linéaires : Présentation d'une méthode non-paramétrique.*, Réunion-débat A.F.P.S. : "le comportement non-linéaire des structures en béton armé sous sollicitation sismique", Novembre, Saint-Rémy-les-Chevreuses.
- CONF4. P. Argoul, **1988**. *Une méthode d'identification non-paramétrique des structures vibratoires.*, XVII<sup>ème</sup> Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée, Août, Grenoble.
- CONF5. P. Argoul, **1988**. *Détection et identification des non-linéarités dans les structures.*, Conférence Internationale - Mesures et Essais en Génie Civil, Septembre, Lyon, Vol I, pp 133-142.
- CONF6. P. Argoul & L. Jézéquel, **1988**. *Nonparametric identification of nonlinear multi-degree dynamic systems with important nonlinear modal coupling.*, 13<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, Septembre, Louvain, Belgique.
- CONF7. P. Argoul, **1988**. *Identification des structures mécaniques - Présentation de deux méthodes originales.*, Congrès International StruCoMe, Novembre, Paris, Edts Hermes, Vol 2, pp 841-850.
- CONF8. H. Afra, P. Argoul & P.Y. Bard, **1990**. *Identification of building structural behaviour from strong motion records.*, 9<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering, Septembre, Moscou, Vol 7-B, pp. 3 - 12.
- CONF9. P.Y. Bard, H. Afra & P. Argoul, **1991**. *Seismic response of buildings during earthquakes : experimental results from strong motion data.*, International Workshop on Seismology and Earthquake Engineering, Mexico City, 22-26 April, 24 pages.
- CONF10. H. Afra & P. Argoul, **1991**. *Détection et caractérisation des non-linéarités dans les bâtiments sous chargement sismique.*, 10<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, 2-6 Septembre, Campus Jussieu Paris, Résumés des communications, Tome IV, pp 61-64.
- CONF11. H. Afra & P. Argoul, **1991**. *Identification du comportement non-linéaire de bâtiments à partir de leurs réponses accélérométriques.*, 10<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, 2-6 Septembre, Campus Jussieu Paris, Résumés des communications, Tome IV, pp 181-184.
- CONF12. H. Afra & P. Argoul, **1991**. *Identification of buildings behaviour under seismic loadings.*, EUROMECH First European Solids Mechanics Conference, Munich, FRG, 9-13 Septembre, Abstracts of short lectures, pp 5-6.
- CONF13. P. Argoul & B. Guillermin, **1991**. *Study of the dynamic behaviour of a plate with friction.*, EUROMECH 280 " Identification of non-linear mechanical systems from dynamic tests", 29-31 Octobre, Ecole Centrale de Lyon, France, Editeurs : L. Jézéquel & C.H. Lamarque, Balkema Publishers, pp 13-20.
- CONF14. P. Argoul, H. Afra & P.Y. Bard, **1992**. *Characterization and identification of the non linear behaviour of buildings.*, 10<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, 19-25 Juillet, Madrid, Espagne, Balkema, Rotterdam, pp 3841-3846.
- CONF15. I. Alamé & P.Argoul, **1992**. *Une nouvelle modélisation pour le comportement vibratoire des bâtiments.*, Congrès International StruCoMe, Novembre, Paris-CNAM, Organisation APCAS -Andresy France-, Actes du Congrès, pp 690-701.

- CONF16. P. Argoul, **1993**. *Le phénomène de dégradation de la rigidité dans le comportement sismique de bâtiments en béton armé.*, 3<sup>ème</sup> Colloque National de Génie Parasismique : Génie Parasismique et Aspects Vibratoires dans le Génie Civil, Mars, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, Organisation AFPS, , Vol II, BA pp 72-82.
- CONF17. I. Alamé & P. Argoul, **1993**. *Un nouveau modèle du comportement dynamique des bâtiments.*, 3<sup>ème</sup> Colloque National de Génie Parasismique : Génie Parasismique et Aspects Vibratoires dans le Génie Civil, Mars, Saint-Rémy-les-Chevreuses, Vol II, MC pp 1-9.
- CONF18. F.J Ulm, J.L. Clément & P. Argoul, **1993**. *Coefficient de comportement : Approche chute de fréquence.*, 3<sup>ème</sup> Colloque National de Génie Parasismique : Génie Parasismique et Aspects Vibratoires dans le Génie Civil, Mars, Saint-Rémy-les-Chevreuses, Vol II, MC pp 49-56.
- CONF19. I. Alamé & P. Argoul, **1993**. *Dynamique non linéaire des câbles.*, 11<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Septembre, Villeneuve d'Ascq, Actes du Congrès, Vol 5, pp 69-72.
- CONF20. I. Alamé & P. Argoul, **1994**. *Dynamique des câbles en grands déplacements.*, 26<sup>ème</sup> Congrès d'Analyse Numérique, Juin, Les Karelles, Actes du Congrès, pp 9-10.
- CONF21. I. Alamé, P. Argoul & J.P. Touret, **1994**. *Dynamic models for coupled lateral and torsional response of asymmetric buildings.*, 10<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering, 28 Août-02 Septembre, Vienne, A.A. Balkema 1995, pp. 1309-1314 .
- CONF22. P. Argoul & B. Guillermin, **1995**. *Réflexions sur l'identification dynamique de structures en présence de non-linéarités.*, 2<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, Mai, Giens, Hermès Editions, Vol 2, pp. 455-460.
- CONF23. P. Argoul, F. Chevoir, C. Cholet & M. Frémond, **1995**. *Chocs de solides rigides.*, 2<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, Mai, Giens, Hermès Editions, Vol 1, pp. 361-366.
- CONF24. J. Sainte-Marie & P. Argoul, **1995**. *Pesage en marche sur ouvrage d'art. Etude d'un cas simple.*, 12<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Septembre, Actes de la conférence, Vol 4, pp 105-108.
- CONF25. C. Cholet, P. Argoul, F. Chevoir & M. Frémond, **1995**. *Chocs de particules anguleuses.*, 12<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Septembre, Actes de la conférence, Vol 2, pp 69-72.
- CONF26. J. Sainte-Marie, P. Argoul & W. Baumgärtner, **1995**, *Estimation of the traffic load on bridges by the extended Kalman filter procedure*, International Symposium on New Advances in Modal Synthesis of Large Structures Non-linear, Damped and Non-deterministic Cases, 5-6 Octobre, L. Jézéquel Editors, Balkema 1997, Rotterdam, pp.169-180.
- CONF27. P. Argoul, **1996**, *Modal identification : an integral transform seen as a complex wavelet transform*, Euromech Colloquium 356 : Transform Methods in Solids Mechanics, 3-5 Octobre, München, Booklet of Abstracts.
- CONF28. P. Argoul, H.-P. Yin & B. Guillermin, **1998**. *Utilisation de la transformation en ondelettes pour le traitement de signaux mécaniques*, XII<sup>ème</sup> Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, ECL Ecully - France, Juin, Actes du Colloque.
- CONF29. J. Sainte-Marie, P. Argoul, B. Jacob & V. Dolcemascolo, **1998**. *Multiple sensors WIM using reconstruction algorithms of the dynamic axles loads*, 2nd European Conference on Weigh-In-Motion of Road Vehicles, Lisbonne - Portugal, 14-16 Septembre, Proc.
- CONF30. P. Argoul, H.-P. Yin & B. Guillermin, **1998**. *Use of the wavelet transform for the processing of mechanical signals*, ISMA23 International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven - Belgique, 16-18 Septembre, Proc. pp. 329-336.
- CONF31. P. Argoul, B. Guillermin, A. Horchler & H.-P. Yin, **1999**. *Integral transforms and modal identification*, 2nd International Conference on Identification in Engineering Systems, University of Wales, Swansea, Royaume-Uni, 29-31 Mars, proceedings.
- CONF32. H.-P. Yin, P. Argoul, B. Guillermin & A. Horchler, **1999**. *Une méthode d'identification modale utilisant la fonction d'analyse des singularités*, 4<sup>ème</sup> Colloque en Calcul des Structures, Giens, France, 18-21 Mai, CSMA - Edt Teknea, Toulouse, Actes du Colloque pp.851-856.
- CONF33. P. Argoul, F. Conti & X. Vazquez, **1999**. *Analyse par ondelettes de réponses libres de systèmes mécaniques. Application à l'identification de paramètres*, Table Ronde MV2 Modélisation et Identification des Structures et des Systèmes, Vibrants Non-Linéaires, ESIEE, Champs/Marne, 2 Décembre, Actes de la Table Ronde.

- CONF34. P. Argoul, S. Hans, F. Conti & C. Boutin, **2000**. *Time-frequency analysis of free oscillations of mechanical structures. Application to the identification of the mechanical behavior of buildings under shocks*, COST F3 Conference "System Identification and Structural Health Monitoring", 6-9 Juin, ETSI Madrid, Edt. J.A. Güemes, Vol 1, pp. 283-292.
- CONF35. J.-C. Golinval & P. Argoul, **2000**. *COST F3 "Structural Dynamics" 1997-2001 : Presentation and preliminary results*, 3rd IASC International Workshop on Structural Control , (invited plenary session), 6-8 Juillet, ENPC, Champs/Marne, in Proc. Structural Control for civil and infrastructure engineering, Edts F. Casciati & G. Magonette, 2001, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp. 263-280.
- CONF36. P. Argoul, S. Hans, T-P. Le & C. Boutin, **2001**. *Analyse temps-fréquence de réponses de bâtiments à des essais de chocs*, 5<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 15-18 Mai, Giens(Var), Actes du Colloque, 2001, Teknea, Vol 2, pp. 1057-1064.
- CONF37. P. Argoul, O. Bursi, S. Erlicher & N. Point, **2001**. *Modeling and identification of the degrading hysteretic behaviour of steel-concrete shear connectors*, International Conference on Structural System Identification, 5-7 Septembre, Kassel(Germany), Proc. of the Conf., Universitätsbibliothek Kassel, Vol. 1, pp. 293-302.
- CONF38. M. Munoz, P. Argoul & F. Farges, **2001**. *Wavelet analysis of EXAFS spectra* 4th European Conference on Mineralogy and Spectroscopy, 10-12 Septembre, Paris.
- CONF39. O. Abraham, T-P. Le, Ph. Cote & P. Argoul, **2002**. *Two enhanced complementary impact echo approaches for the detection of void in tendon ducts*, 1st International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management, 14-17 Juillet, Barcelone, Espagne, pp. 151-152 + 8 pages sur CDRom.
- CONF40. P. Argoul, J-L. Dion, A. Huynh & N. Point, **2002**. *Modèles rhéologiques utilisant les dérivées fractionnaires pour les matériaux viscoélastiques linéaires. Application à l'identification du comportement d'élastomères.*, XIIIème Colloque "Vibrations Chocs et Bruit 2002", 12-14 Juin, Ecole Centrale de Lyon.
- CONF41. P. Argoul, R. Ceravolo, A. de Stefano & J.F. Perri, **2002**. *Instantaneous Estimators of Structural Damping from linear time-frequency representations.*, Third World Conference on Structural Control, 7-12 Avril, Como, Italy, Vol. 2, pp. 1039-1044.
- CONF42. P. Argoul & T-P. Le, **2002**. *Wavelet analysis of transient signals. Instantaneous indicators for structural modal identification.*, EUROMECH Colloquium 437 - Identification and Updating Methods, of Mechanical Structures, Institute of Thermomechanics ASCR, 19-21 Juin, Prague, République Tchèque, Booklet of Abstracts.
- CONF43. J.C. Golinval, G. Kerschen, V. Lenearts, F. Thouverez and P. Argoul, **2002**. *European COST Action F3 on Structural Dynamics. Working Group 3 : Identification of Non-linear Systems. Activities and results.*, International Conference on Noise & Vibration Engineering ISMA2002, 16-18 Septembre, Leuven, Belgique, Proceedings, Vol III, pp. 1177-1182.
- CONF44. T-P. Le & P. Argoul, **2003**. *Utilisation de la transformation en ondelettes pour l'identification des systèmes mécaniques non linéaires en vibration*, 16eme Congrès Français de Mécanique, 1-5 Septembre, Nice, France, article accepté pour présentation orale.
- CONF45. A. Huynh, P. Argoul, J-L. Dion & N. Point, **2003**. *Comportement des élastomères à basses fréquences : modèles et identification*, 16eme Congrès Français de Mécanique, 1-5 Septembre, Nice, France, article accepté pour présentation orale.
- CONF46. S. Erlicher, T-P. Le, P. Argoul, **2003**. *Transformation en ondelettes pour l'analyse vibratoire de structures linéaires et non linéaires*, Journées des Sciences de l'Ingénieur, 9-11 Décembre, Dourdan, France, article accepté pour présentation orale.
- CONF47. P. Argoul, **2003**. *Introduction aux problèmes inverses et aux problèmes d'identification de paramètres*, Journées des Sciences de l'Ingénieur, 9-11 Décembre, Dourdan, France, Conférence introductive, article à paraître dans les actes.
- CONF48. M. Munoz, F. Farges, P. Argoul, **2003**. *Continuous Cauchy wavelet transform analyses of XANES and EXAFS spectra*, Physica Scripta, Proceedings 5220 of the X-ray Absorption Fine Structure (XAFS 12) meeting, 22-27 Juin, Malmö-Lund, Suède, article à paraître dans les actes.
- CONF49. P. Argoul, T-M. Nguyen, **2004**. 7-9 Juin, Fr'ejus



- CONF50. N. Point, P. Argoul, J-L. Dion, A. Huynh, **2004**. *Etude critique de la prédictivité de modèles viscoélastiques*, 16-18 Juin, Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, Lyon.
- CONF51. T-M. Nguyen, P. Argoul, R. Ceravolo, **2005**. *Wavelet analysis of the structural response under ambient excitations for modal identification* Sixth European Conference on Structural Dynamics EURO-DYN2005, 4-7 Septembre, Paris (communication acceptée, 6 pages)
- CONF52.

### **Conférence invitée ou séminaires**

# Bibliographie

- EXPO1. P. Argoul, *Identification des structures vibrantes - Application au génie parasismique.*, Comité Scientifique du CNRS au L.M.S.G.C., 1993, Champs/Marne.
- EXPO2. P. Argoul, *Dynamical Identification of mechanical structures. Presentation of several techniques.*, Université Technique de Munich, Lehrstuhl für Baumechanik, 1994.
- EXPO3. P. Argoul & L. Lelu, *Modélisation d'un véhicule léger. Application du logiciel DYVA (Renault) aux mesures sur routes.*, LCPC Nantes, 19/10/1994.
- EXPO4. P. Argoul, *Simplified models for multi-storey buildings irregular in plan and comparison with refined F.E. analysis.*, 1st International Workshop "Earthquake Engineering research in Europe : Current trends and prospects", 19/01/1995, Thessalonique, Grèce.
- EXPO5. P. Argoul, P-Y. Bard & M. Kahan, *System identification techniques. Application to responses of buildings and bridges under seismic loadings.*, 1st International Workshop "Earthquake Engineering research in Europe : Current trends and prospects", 19/01/1995, Thessalonique, Grèce.
- EXPO6. P. Argoul, *Inverse Problems in mechanics - Material and dynamical identification.*, Università degli studi di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica (sous l'invitation du Professeur Danilo Capocchi), 01/06/1995, Rome, Italie.
- EXPO7. P. Argoul, *Some trends about hysteresis and damage phenomena. Application to buildings under seismic excitations*, 2nd International Workshop "Earthquake Engineering research in Europe : Current trends and prospects", 28/10/1995, Chester, Angleterre.
- EXPO8. P. Argoul, *Analysis of impact force variation for similar vehicles with air and steel suspensions*, Conférence d'information - Débat sur le projet 'Divine' de l'OCDE, le jeudi 16/11/1995, LCPC, Paris.
- EXPO9. P. Argoul, *Nonlinear dynamical identification of mechanical structures - Application to buildings under earthquake excitations*, Università de Basilicata (sous l'invitation du Professeur Maoro Dolce), le mercredi 13/12/1995, Potenza, Italie.
- EXPO10. P. Argoul, *Problèmes inverses en Mécanique des Solides.*, Escuela Tecnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politecnica de Valencia", (sous l'invitation du Directeur de Recherche, Dr. Francisco Chinesta Soria), 13/12/1996, Valence, Espagne.
- EXPO11. P. Argoul, *Fonction de transfert et transformation par ondelettes*, Institut de Mécanique de l'Université de Liège (sous l'invitation du Professeur Jean-Claude Golinval), le vendredi 26/09/97, Liège, Belgique.
- EXPO12. P. Argoul, *Utilisation de la transformée en ondelettes pour le traitement des signaux mécaniques*, Journée Séminaire de Garchy, 13-15/01/1998, Actes du Séminaire, pp. 59-63.
- EXPO13. P. Argoul, *Application de la transformée en ondelettes continue au traitement de vibrations libres de systèmes non linéaires. Identification de paramètres.*, Journée Analyse par ondelettes - Applications, 16/04/1999, LCPC, Paris.
- EXPO14. P. Argoul, F. Conti & X. Vazquez, *Identification of modal parameters by means of the wavelet transform*, Meeting of WG3 of the COST Action F3 "Structural Dynamics", 14/06/1999, LCPC, Paris.
- EXPO15. P. Argoul, *Applications de l'analyse en ondelettes* CT 82, "Mesure et traitement de l'information", Réunion de l'axe "Traitement du Signal et de l'Image - Synthèse d'Image", le 01/07/1999, LCPC, Centre de Nantes.
- EXPO16. P. Argoul, *Utilisation de la transformation en ondelettes continue pour l'analyse de signaux sismiques*, Journées du thème GEO36, le 01/12/1999, LCPC, Centre de Nantes.

- EXPO17. P. Argoul, F. Conti, S. Hans, A. Horchler, X. Vazquez, *Analyse de signaux mécaniques par la transformée en ondelettes continue. Application à l'identification de paramètres.*, Réunion du Conseil de Pôles Sciences pour l'Ingénieur, le vendredi 31/03/2000, LCPC, Paris.
- EXPO18. P. Argoul, *Présentation du bilan 1996-2000 pour le thème "Thermomécanique et analyse numérique"*, Réunion du comité d'évaluation du LMSGC par le CNRS (section 09), le 22/06/2000, LMSGC, Champs/Marne.
- EXPO19. P. Argoul, *Quelques réflexions sur les problèmes inverses vibratoires. Applications au génie civil et au génie mécanique.*, 1er Colloquium Lagrangianum, 06-09/12/2000, Taormina, Italie.
- EXPO20. P. Argoul, *Identification de paramètres. Théorie inverse discrète*, Séminaire interne du LAMI, du 29/05 au 01/06/2001, Bordeaux.
- EXPO21. Munoz M., Argoul P., Farges F, *Nickel in Oxide Crystals and Melts - An Anharmonic EXAFS Study Using Wavelet Transform*, Présentation d'un poster à la 4<sup>ème</sup> conférence européenne : Minéralogie et Spectroscopie, résumé publié dans le Bulletin de liaison de la Société Française de Minéralogie et de Cristallographie, le 10-14/09/2001, Paris.
- EXPO22. T-P. Le & P. Argoul, *Wavelet analysis of signals in civil and mechanical engineering.*, Présentation d'un poster à la 1<sup>ère</sup> Conférence Internationale Albert Caquot, le 03-05/10/2001, Paris.
- EXPO23. P. Argoul, *Ondelettes et identification modale*, 2<sup>ème</sup> Colloquium Lagrangianum, 08-10/11/2001, le Mont-Saint-Michel.
- EXPO24. P. Argoul, *Présentation de deux thèmes de recherches du LAMI<sup>33</sup> dans le cadre du programme 2002 de Recherche et Développement du LCPC.*, Réunion de l'Opération du LCPC "Risques sismiques", le 15/11/2001, CETE de Lyon (Bron).
- EXPO25. P. Argoul, *Présentation du bilan des activités de recherche 2001 de l'axe "Comportement dynamique des Matériaux et des Structures" du LAMI.*, Réunion Budget 2002 des centres communs du LCPC sur le site de Champs/Marne, le 14/12/2001, ENPC, Champs/Marne.
- EXPO26. P. Argoul, *Présentation des recherches de l'axe du LAMI : Comportement dynamique des matériaux et des structures*, Séminaire interne du LAMI, du 29/05 au 05/2002, Giens.
- EXPO27. P. Argoul, *Ondelettes continues 1D*, Séminaire interne du LAMI, du 13/05 au 16/05/2002, Giens.
- EXPO28. P. Argoul, A. Huynh, J-L. Dion & N. Point, *Dynamical behaviour of elastomers at low frequencies : some models and their identification*, 3<sup>ème</sup> Colloquium Lagrangianum, 07-09/11/2002, Ravello, Italie.
- EXPO29. P. Argoul, *Activités 2002-2003 du thème de recherche : "Identification des Matériaux et des Structures" du LAMI*, Séminaire interne du LAMI, du 19/05 au 21/05/2003, Allevard-Pinsot.
- EXPO30. P. Argoul, *Transformation en ondelettes pour l'analyse modale de systèmes linéaires avec amortissement proportionnel ou non proportionnel*, Séminaire de Modélisation en Mécanique des Solides, Université PARIS VI, 6 Avril 2004.

## Rapports internes, de contrat ou de mission - Notes de cours

---

<sup>33</sup>deux thèmes de l'axe "Comportement dynamique des Matériaux et des Structures".

# Bibliographie

- RAPP1. P. Argoul & L. Jézéquel, rédaction d'un polycopié de "Travaux-Pratiques - Vibrations" pour l' U.V. "Mécanique des Vibrations" de la V.A. Structures (3ème année d'ingénieur des T.P.E.), **1984**, Presses de l'E.N.T.P.E.
- RAPP2. I. Alamé & P. Argoul, rapport n°1 du contrat EDF/CNRS n°ND2163MS pour EDF et n°509242 pour CNRS *Le mouvement de torsion dans les bâtiments soumis à des séismes.*, **1992**, 68 pages.
- RAPP3. I. Alamé & P. Argoul, rapport n°2 du contrat EDF/CNRS n°ND2163MS pour EDF et n°509242 pour CNRS *Le mouvement de torsion dans les bâtiments soumis à des séismes.*, **1993**, 116 pages.
- RAPP4. I. Alamé, P. Argoul & X. Chateau, rapport n°3 du contrat EDF/CNRS n°ND2163MS pour EDF et n°509242 pour CNRS *Le mouvement de torsion dans les bâtiments soumis à des séismes.*, **1993**, 93 pages.
- RAPP5. L. Lelu & P. Argoul, rapport interne sur la modélisation de véhicules légers en vue de l'étude des effets de l'uni des chaussées, *Utilisation du logiciel CONFORT* - Application à des essais sur routes, **1994**, 50 pages.
- RAPP6. X. Martiré & P. Argoul, rapport du contrat RVI/LCPC/CNRS *Etude de l'influence de la nature des suspensions sur l'endommagement des chaussées*, **1995**, 73 pages.
- RAPP7. P. Argoul, rapport d'activité du LMSGC 1992-1996 *Identification dynamique des structures - Théorie et Applications*, **1996**, pp. 28-30.
- RAPP8. P. Argoul, F. Conti & X. Vazquez, rapport du thème GEO97.2 : Fonctionnement dynamique et conception parasismique (bilan de recherche 1999), Sujet : Diagnostic de vulnérabilité, Analyse de réponses libres de bâtiments au moyen de la transformée en ondelettes, **1999**, 35 pages.
- RAPP9. P. Argoul, report of the STSM of P. Argoul at the University of Liège, COST Action F3 "Structural Dynamics" 1997-2001, **2001**, 7 pages.
- RAPP10. P. Argoul, *Techniques passives de contrôle des vibrations*, participation à la rédaction de notes du cours ENPC : *Contrôle du bruit et des vibrations* , Chapitre 3, autres intervenants : M. Brocato, D. Duhamel et H. Yin, **2004**, pp. 61-96.

## Enseignement - Encadrement de stagiaires

Cette section est divisée en trois parties. La première partie concerne les enseignements, la participation au jury d'admission d'écoles d'ingénieurs et aux demandes d'avis et d'expertises qui m'ont été faites. La seconde traite de l'encadrement de stagiaires et l'accueil de chercheurs étrangers qui sont venus me rendre visite pour des séjours longs (supérieurs à 1 mois). La dernière partie rassemble les points forts de ma participation à la recherche et à la vie scientifique nationale et internationale.

### Enseignement - Jury d'admission - Avis de spécialiste

#### Enseignement

- Assistant de Travaux Dirigés de Mécanique des Milieux Continus  
Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat (1983-84).
- Assistant de Travaux Dirigés de Mécanique des Vibrations  
Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat (1983-84).
- Assistant de Travaux dirigés de Mécanique des Fluides  
Ecole Supérieure des Ingénieurs de Marseille (1984-85).

- Assistant du cours de Mathématiques  
Ecole Spéciale des Travaux Publics (1990-91 1991-92 1992-93 1993-94 1994-95 1995-96 1996-97 1997-98 1998-99 1999-2000 2000-01 2001-02 2002-03 2003-04 2004-05).
- Responsable du cours de Dynamique des Structures et des Matériaux Composites - Ecole des Ingénieurs Roboticiens INSTN (1990-91).
- Assistant de Travaux Pratiques de Dynamique des Structures et des Matériaux Composites  
Ecole des Ingénieurs Roboticiens INSTN (1991-92 1992-93 1993-94).
- Assistant de Travaux dirigés de Mécanique des Solides Rigides - DEUG SM 1<sup>ère</sup> année  
Université de Marne la Vallée (1992-93).
- Assistant de Travaux dirigés de Mécanique des Solides Rigides - DEUG SM 2<sup>ème</sup> année  
Université de Marne la Vallée (1992-93 1993-94 1994-95 1995-96 1996-97).
- Responsable du cours de Mécanique des Solides Rigides - DEUG SM 2<sup>ème</sup> année  
Université de Marne la Vallée (1999-2000).
- Responsable du cours de Vibrations Linéaires  
Institut Supérieur de Technologie et Management (1997-98, 1998-99, 1999-2000, 2000-01, 2001-02, 2002-03, 2003-2004).
- Responsable du cours de Mécanique des Solides Rigides  
Institut Supérieur de Technologie et Management (1997-1998).
- Responsable du cours “Introduction aux Problèmes inverses en mécanique des matériaux et des structures”  
DEA Géomatériaux, Université de Marne la Vallée (1995-96 1996-97 1997-98 1998-99 1999-2000 2000-2001)
- Responsable du cours “Introduction to inverse problems in mechanical engineering and civil engineering”  
Université de Trento - Italie (1999-2000 2000-01)
- Co-responsable avec P. Lerat du projet 1<sup>ère</sup> Année ENPC : “Comment construire son propre sismomètre”  
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (2000-01 2001-02)
- Responsable du cours “Equations aux dérivés partielles” - Partie théorique.  
Ingénieurs 2000 -Filière Génie Mécanique, 2<sup>ème</sup> année, Université de Marne la Vallée (2001-02 2002-03 003-04, 2004-05)
- Co-responsable du cours “Contrôle du bruit et des vibrations” -  
ENPC - 2<sup>ème</sup> année (avec D. Duhamel, M. Brocato et H. Yin) (2003-04 2004-05)
- Co-responsable du cours “Optimisation” -  
Mastere - 2<sup>ème</sup> année (avec B. Nedjar, N. Point) (2004-05)
- Responsable du cours “Equations aux dérivés partielles” - Partie théorique.  
Ingénieurs 2000 -Filière Génie Mécanique, 2<sup>ème</sup> année, Université de Marne la Vallée (2001-02 2002-03 003-04, 2004-05)

Co-responsable avec T.M. Nguyen du projet 1<sup>ère</sup> Année ENPC : “Traitement des réponses vibratoires d’une lame mince par la transformation en ondelettes”

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (2003-04 2004-05)

Co-responsable avec S. Erlicher du projet 1<sup>ère</sup> Année ENPC : “Microscopie de force atomique”

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (2004-05)

### Jury d’admission

- Concours d’entrée à l’ISTM depuis 2001 (admission sur dossier + entretien).
- Rédaction avec Philippe Bisch de l’épreuve de Résistance des Matériaux pour le concours public d’Ingénieur des Services Techniques de la Mairie de Paris. Correction de l’épreuve.

### Avis de spécialiste

- 2000 : Expert 2000 pour le prix ROBERVAL<sup>(34)</sup> : Prix francophone du livre et de la communication en technologie. Expertise du livre : *Vitesses et techniques d’imagerie en sismique réflexion* (Principes et méthodes) d’Etienne Robein, Editions Tec et Doc, Paris.
- 2001 : Avis pour Claude Henri Lamarque sur l’article de J. Slavic, I. Simonovski, M. Boltezar intitulé : *Damping identification using a continuous wavelet transform : application to real data* qui est paru en 2003 au Journal Sound and Vibration (262 pp. 291-307).

<sup>34</sup>Le Prix ROBERVAL, créé en 1986 par le Conseil Général de l’Oise et l’Université de Technologie de Compiègne, est un concours international francophone, ouvert dans tous les pays de la francophonie, aux auteurs d’oeuvres à caractère technologique.

- 2002 : Expertise du manuscrit de J.P. Dron, F. Bolaers, L. Rasolofondraire intitulé : *Optimisation de la détection et du suivi vibratoire des roulements par débruitage des signaux par soustraction spectrale* qui est paru au Journal Mécanique & Industries.
- 2002 : fait partie du groupe chargé de l'organisation pratique et orientation scientifique des Journées des Sciences de l'Ingénieur organisé par le LCPC (Décembre 2003)
- 2003 : Expert pour l'évaluation approfondie de l'activité Dynamique des Structures au sein du département Dynamique des Structures et des Systèmes Couplés (DDSS) de l'ONERA<sup>(35)</sup> (14 Mars Réunion du CEO). Nommé président du CEO/GT.
- 2003 : Expert pour le projet EMERGENCE 2003 de la région Rhône-Alpes, thème : Sciences de l'ingénieur. Evaluation du projet : “ Pompage énergétique : théorie, expérience, faisabilité ” de M. Claude-Henri Lamarque.
- 2003 : Expertise du manuscrit de P. Verboven, E. Parloo, B. Cauberghe et P. Guillaume : *Frequency Response Function Estimation for Lowly Damped Systems by Application of Exponential Windowing Technique* pour la revue Mechanical Systems and Signal Processing.
- 2004 : Expert pour l'évaluation approfondie de l'activité aéroélasticité au sein du département Dynamique des Structures et des Systèmes Couplés (DDSS) de l'ONERA
- 2004 : Expertise du manuscrit de Joseph Lardies et Minh Ta : *A wavelet-based approach for the identification of a class of non-linear damping models* pour la revue International Journal of Mechanical Sciences.
- 2005 : Expertise du manuscrit de Pascal Vernay et Guy Ferraris *Comportement dynamique en torsion et en régime transitoire d'un démarreur de moteur d'avion* pour le Revue Mécanique & Industries.

## Accueil et Encadrement de stagiaires

Ce paragraphe est divisé en trois sous-paragraphe : tuteur de stage ou expert, accueil de visiteurs étrangers pour des séjours longs (supérieurs à un mois), et responsable de stage (DEA, fin d'études d'ingénieur).

### Tuteur de stage ou expert

- Jean-Baptiste Ratier, stage de 1<sup>ère</sup> année d'ingénieur H.E.I. Lille (1985-1986), responsable de stage : B. Forestier - I.M.F.M. Marseille, *Utilisation du code FIDAP pour la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre*.
- Jérôme Malécot, stage de 1<sup>ère</sup> année d'ingénieur E.N.P.C. Paris (1989-1990), responsable de stage : Dr Syngellakis - Univ. Southampton , *Wave propagation in frames*.
- J-L GuÉrin-Boutaud, stage de 1<sup>ère</sup> année d'ingénieur E.N.P.C. Paris (1989-1990), responsable de stage : P. Gidoin - Univ. Renault, *Analyse des bruits de claquements de portes*.
- Pierre Rouxel, stage de 1<sup>ère</sup> année d'ingénieur E.N.P.C. Paris (1990-1991), responsable de stage : M. Caignaert - Labo. Méca ENSAM Lille, *Equilibrage d'un moteur à quatre cylindres*.
- Alexandre Cuer, rapport de fin d'études ENTPE Vaulx-en-Velin promotion 42 V.A. Génie civil (1996-1997), responsable de stage : Claude-Henri Lamarque - ENTPE Vaulx-en-Velin, *Ondelettes et applications : Identification de l'amortissement de signaux numériques*
- Daniel Rodriguez, rapport de fin d'études ENTPE Vaulx-en-Velin promotion 43 (1997-1998), responsable de stage : Michel Panet - EDF, *Prévision de la réponse dynamique d'une coque d'aéro-réfrigérant à l'aide d'un modèle homogène équivalent*
- François Platel, stage de 1<sup>ère</sup> année d'ingénieur E.N.P.C. Paris (1999-2000) responsable de stage : Eric Dimnet - LMSGC Champs/Marne, *Identification de paramètres de choc pour un solide déformable*.
- Julien Normand, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (1999-2000), responsable de stage : Guillaume Blanchard - SAGEM, *Contrôle de calibres interférométriques*
- Sébastien Nicard des Rieux, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2000-2001), responsable de stage : M. Mey - PSA PEUGEOT-CITROEN Mulhouse, *Traitement thermique de Recuit Iso Direct*.
- Sylvain Pallatier, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2000-2001), responsable de stage : M. Di Giacomo - ABVENT Paris, *Aide au développement et au lancement d'un logiciel de CAO*.
- Marc Fargeau, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2000-2001), responsable de stage : Armel Doyer - SKF St-Cyr-sur-Loire, *Etude des cages en polymère de roulement à billes*.

<sup>35</sup>ONERA Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (Centre de Châtillon). Le directeur du département DDSS est Pierre-Marie Hutin.



- Emmanuel Tarot, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2000-2001), responsable de stage : M. Audenard - SOFRATEST Ecquevilly, *Conception d'une machine destinée à visualiser en continu le profil de soudure de tubes.*
- Valérie Berterottière & Mourad Benis, stage de 1<sup>ère</sup> année d'ingénieur E.N.P.C. Paris (2000-2001), responsable de stage : François Chevoir - LMSGC Champs/Marne, *Écoulements granulaires sur plan incliné.*
- Rodolphe Bunodiére, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2001-2002), responsable de stage : Mme Biarroz - ASCOMETAL Allevard Le Cheylas, *Contrôle non destructif par courants de Foucault.*
- Gabrielle Duby, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2001-2002), responsable de stage : MM. Devallez et Moreau - ALSTOM VPF Petite Forêt, *Utilisation de Catia et lien avec les nomenclatures informatisées. Suivi de l'utilisation du parc de stations Catia.*
- Ludovic Milet, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2001-2002), responsable de stage : M. Labrele - Entreprise LEGRAND Limoges, *Elaboration d'une méthodologie pour identifier les axes d'amélioration majeurs d'un atelier de fabrication.*
- Cécile Dausseing, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2001-2002), responsable de stage : M. Boursat - ALSTOM Transport Sénéac, *Etude de l'industrialisation d'un interrupteur de puissance.*
- Emmanuel Tarot, rapport de mission de 3<sup>e</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2002-2003), responsable de stage : M. J-Luc Giguet - Auteroche Industrie, *Conception d'un nouveau projecteur combiné*
- Delphine Sengelin, rapport de fin d'études ENTPE Vaulx-en-Velin promotion 48, (2002-2003), responsable de stage : Jean-Marc Malasoma, *Reconstruction locale de systèmes complexes forcés*
- Emmanuel Gourdon, rapport de fin d'études ENTPE Vaulx-en-Velin promotion 48, (2002-2003), responsable de stage : Claude-Henri Lamarque, *Pompage énergétique : principe, théorie, efficacité*
- Léonard Phan, rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2003-2004), responsable de stage : ,
- , rapport de stage de fin de 1<sup>ère</sup> année ISTM option MA2i, Champs/Marne (2003-2004), responsable de stage : ,

#### Accueil de visiteurs étrangers

- Serguei Potapov, Docteur ukrainien de l'Ecole Supérieure du Bâtiment et des Constructions Civiles de Kiev, stage de 3 mois - boursier CIES (1992-1993), responsables de stage : M. Halphen & P. Argoul -
- Mahmoud Said, Professeur syrien de l'Université de Lattaquié, stage de 6 mois - boursier (1994), responsable de stage : P. ARGOUL -
- Oreste Bursi, Professeur italien de l'Université de Trento, 1999.
- Silvano Erlicher, Doctorant italien de l'Université de Trento (Italie) - responsables de stage : P. ARGOUL & N. POINT - stage du 11 au 24 Juin 2001 dans le cadre d'une mission scientifique de courte durée (STSM) pour le COST F3 "Structural Dynamics" (1997-2001). Sujet de stage : Comportement hystérétique des structures composites acier-béton
- Rosario Ceravolo, Chercheur italien du politecnico de Turin (Italie) - stage de 3 mois (juillet-août-septembre 2001) - Travail de recherche sur l'estimation de l'amortissement visqueux linéaire à partir de réponses d'ouvrages d'art à des excitations ambiantes.
- Redouane Adman, Enseignant-Chercheur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene - Alger - stage de 1 mois boursier algérien du 10/01 au 10/02/2002, responsable de stage : , Recherches bibliographiques sur l'expérimentation numérique des phénomènes liés au flambement non linéaire.
- Oreste Bursi, Professeur à l'université de Trento (Italie) - stage du 12 août au 30 août 2002 - travail de réflexions sur la poursuite de la collaboration franco-italienne.

#### Responsable de stage

- Hamid Afra, DEA Paris VI - Option V Mécanique et Informatique des Solides et des Structures - (1987-1988), *Etude dynamique des structures comportant des non-linéarités.*
- Florian Hehenberger, Diplomarbeit Travail de fin d'études universitaires Technische Universität München - (1989-1990), *Etude du comportement dynamique d'une plaque avec une interface non-linéaire.*
- Saddak Ayadhi, DEA Paris VI - Option IV Mécanique des Solides et des Structures, (1989-1990), *Etude d'une non-linéarité due à un frottement sur l'interface d'une plaque soumise à une excitation harmonique.*
- Philippe Viot, DEA Paris VI - Option IV Mécanique des Solides et des Structures , (1989-1990), *Identification des caractéristiques d'un joint non linéaire monté sur une structure.*



- Abdel Jelil Khelalfa, DEA Mécanique des Solides et des Structures Paris VI - Option IV , (1991-1992), *Modélisation dynamique simple d'un véhicule pour tenir des effets de pompage et de roulis*.
- Laurent Lelu, DEA Mécanique - Option Solide - Université Pierre et Marie Curie (1992-1993), *Etude d'un pont sous l'effet d'une charge mobile*.
- Jacques Rebérol, DEA Mécanique - Option Solide - Université Pierre et Marie Curie (1993-1994), *Le coefficient de comportement sismique des structures*
- Raphaël Cure, Stage de maîtrise de l'Université Paris VI Juillet-Août 1994, *Travail sur le coefficient de comportement*
- Xavier Martiré, Stage d'option de l'Ecole Polytechnique (1994-1995), *Prise en compte des phénomènes non linéaires dans le calcul parasismique*
- Karine Cheval, DEA Paris VI - Option IV Mécanique des Solides et des Structures, (1994-1995), *Modélisation dynamique d'un bâtiment pour prendre en compte les effets de torsion*
- Patrick Hehenberger, Diplomarbeit Travail de fin d'études universitaires Technische Universität München (1994-1995), *Le modèle de comportement non linéaire hystérétique de Wen-Bouc. Application au comportement sismique d'un bâtiment*
- Jacques Sainte-Marie, DEA Acoustique et Vibrations de l'Ecole Centrale de Lyon, (1994-1995), *Identification par filtrage de Kalman - Simulations numériques*.
- Philippe Andréani, DEA Géomatériaux de l'Université de Marne-la-Vallée (1995-1996), *Identification de paramètres d'une loi de comportement d'un élastomère sollicité en cisaillement*.
- Houman Kamalzadeh, DEA Paris VI - Option IV Mécanique des Solides et des Structures -(1995-1996), *Modélisation 2D du comportement pont-véhicule*.
- Nirina Ramambaoa, Stage d'option de l'Ecole Polytechnique (1995-1996), *Modélisation dynamique d'un bâtiment pour prendre en compte les effets de torsion*.
- Marc Van Ousdesdhen, Stage d'option de l'Ecole Polytechnique (1995-1996), *Optimisation de la position de capteurs*.
- Mahmoud Bensaihi, Stage (2 mois) niveau post doctoral (1996-1997), *Modélisation dynamique des bâtiments asymétriques*.
- Younès Belcadi, Stage d'option de l'Ecole Polytechnique (1996-1997), *Analyse de signaux mécaniques par la transformation en ondelettes continue*.
- Laurence Bourlat, DEA Paris VI - Option IV Mécanique des Solides et des Structures, (1996-1997), *Modélisation par éléments finis du système couplé pont à dalle orthotrope soumis à une charge mobile*.
- Catherine Sheane, Stage d'été Princeton in France été (1997), *Réflexions sur la transformation en ondelettes*
- Andrew Horchler, Stage d'été Princeton in France été (1998), *Mise au point d'un algorithme calculant la fonction d'analyse des singularités*
- Fausto Conti, Stage de fin de cycle universitaire (diplôme d'ingénieur italien) de l'Université Tor Vergata de Rome (23/11/98 - 28/05/99), *Identification de paramètres modaux des structures au moyen de la transformée en ondelettes*
- Xavier Vazquez-Gil, Stage d'été Princeton in France été (1999), *Amélioration d'un algorithme d'extraction des arêtes lors d'une transformation en ondelettes de signaux asymptotiques*
- Alex Huynh-Kim-Long, DEA Solides, structures et systèmes mécaniques , Option 3 “ Mécanique multi-échelles des matériaux et des ouvrages”, (1999-2000), *Modélisation et identification du comportement dynamique des élastomères*
- Fadhel Djemel, DEA Solides, structures et systèmes mécaniques , Option 3 “ Mécanique multi-échelles des matériaux et des ouvrages”, (1999-2000), *Analyse temps-fréquence des signaux mécaniques. Application : Méthode impact-écho*
- Afsheen Afshar, Stage d'été Princeton in France été (2000), *Investigation in the identification of the Bouc model's parameters*.
- Juvaria Aumeerally, Stage d'été Princeton in France été (2001), *Traitement des signaux de poutre par transformation en ondelettes*.
- Grégory Amzel & Olivier Castan, projet 1ère année ENPC (40 heures 2001-2002), *Conception d'un sismomètre amateur*.
- Frédéric Gervais, DEA Analyse et Systèmes Aléatoires de l'Ecole Doctorale ICMS, (2 avril-27 Juillet 2001), *Etude des phénomènes d'hysteresis. Identification des paramètres du modèle de Bouc Wen et analyse des résultats*.
- Christophe Peyrard & Guillaume Faure, projet 1ère année ENPC (40 heures 2001-2002), *Construire son sismomètre*.

- Ali Afshaer, DEA Dynamique des Structures et Systèmes Couplés (DDSS), (2001-2002), *Interaction vibratoire entre bâtiments - Essais en centrifugeuse*
- Jérôme Boulanger, stage de 2ème année Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille (2001-2002), *Analyse temps-fréquence de réponses de structures sous excitations ambiantes*.
- Tien-Minh Nguyen, DEA Solides, Structures et Systèmes Mécaniques (Option 3 “Mécanique multi-échelle des matériaux et des ouvrages) (2002-2003), *Analyse temps-fréquence de réponses de structures sous excitations ambiantes*
- Matthew Bussmann, Stage d’été Princeton in France été (2003), (encadrement conjoint avec S. Erlicher), *Mise au point d’un essai vibratoire de poutres*
- Gueorgui Nikiforov, Stage d’été Princeton in France été (2003), (encadrement conjoint avec N. Point), *Calcul numérique de la dérivation non entière à l’aide de l’algorithme FFT*
- Silvano Erlicher, Stage post-doctoral ENPC, *Identification dynamique de systèmes linéaires avec amortissement non classique et de systèmes non linéaires* (1er Mai - 31 décembre 2003)
- Mark Collinson, Stage d’été Princeton in France été (2003), (encadrement conjoint avec N. Point), *Calcul numérique de la dérivation non entière à l’aide de méthodes de différences finies- (formules de Grunwald)*
- Marylin Waite, Stage d’été Princeton in France été (2004), (encadrement conjoint avec F. Argoul & C. Moskalenko de l’ENS Lyon), *Microscopie de force atomique*
- Marin Nitzoy, Stage d’été Princeton in France été (2004), *Estimation du coefficient d’amortissement à partir de la transformée en ondelettes*
- Kien Nguyen, DEA (2003-2004 Solides, Structures et Systèmes Mécaniques (Option 3 “Mécanique multi-échelle des matériaux et des ouvrages) *Analyse temps-fréquence de réponses vibratoires d’un pont*
- Ziad Aramouni, DEA Equations aux dérivées partielles, analyse numérique (2003-2004) Université Saint-Joseph, Beyrouth Liban, (encadrement conjoint avec N. Point), *Algorithmes génétiques et algorithmes évolutionnaires. Présentation et comparaison avec le recuit simulé*
- Brice Arnaud Ngalamo,

#### Participation à l’encadrement de doctorants ou au jury de thèse

- Hamid Afra, 1988-1991 Thèse de doctorat ENPC, *Identification du comportement sismique de bâtiments à partir de leurs réponses accélérométriques*, 30 / 09 / 1991 : participation en tant qu’examinateur au jury de la thèse de Hamid Afra. (T.H.) (directeur de thèse : Bernard Halphen, co-encadrement)
- Catherine Cholet, 1994-1997 Thèse de doctorat Paris VI, *Etude du mouvement de solides rigides avec contact et collisions* (T.H.) (directeur de thèse : Philippe Ciarlet, co-encadrement avec Michel Frémond)
- Jacques Sainte-Marie, 1995-1999 Thèse de Doctorat ENPC, *Echantillonnage des signaux à bande limitée. Application à l’étude de l’interaction véhicule-chaussée.*, 30 / 04 / 1999 participation en tant qu’examinateur au jury de la thèse de Jacques Sainte-Marie (T.H.)
- Antony Dempsey, 01/04/97 au 31/03/98 : Stage post-doctoral Marie Curie (co-encadrement avec Bernard Jacob), *Knowledge of the trafic loads and actions on steel orthotropic deck bridges and application for fatigue studies*,
- Stéphane Pernot, participation en tant qu’examinateur à la thèse de Doctorat de Stéphane Pernot préparée au Laboratoire Géomatériaux de l’ENTPE de Lyon et soutenue à l’INSA de Lyon *Méthodes ondelettes pour l’étude des vibrations et de la stabilité des systèmes dynamiques* (25/10/ 2000)
- Silvano Erlicher, 1999-2002 Thèse de Doctorat de l’Université de Trento , *Modèles de comportement hystérétique pour les composantes de structures. Modellazione del comportamento isteretico di componenti strutturali.* (14/02/2003) (directeur de thèse : Oreste Bursi, co-encadrement avec Nelly Point)
- Vincent Lenaerts, participation en tant que rapporteur à la thèse de Doctorat de Vincent LENAERTS en Sciences Appliquées préparée et soutenue à l’Université de Liège, *Identification de modèles structuraux en dynamique non linéaire.* (06/03/2003)
- Thien-Phu Le, 2000-2003 Thèse de doctorat ENPC, *Méthodes d’auscultation des structures par vibrations.* (directeur de thèse : Denis Duhamel, co-encadrement) /11/2003
- Franck Pérignon, participation en tant que rapporteur à la thèse de Doctorat de l’Université Aix-Marseille II, préparée et soutenue au Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique de Marseille, *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires.* 07/07/2004.
- Alex Huynh, 2002-2004 Thèse de doctorat ENPC, *Modélisation et identification du phénomène d’hystérésis en mécanique des matériaux et des structures.* (directeur de thèse : Nelly Point, co-encadrant)
- Tien-Minh Nguyen, 2003-2006 Thèse de doctorat ENPC, *Réduction de modèles en dynamique non linéaire de systèmes mécaniques couplés. Application à l’interaction sol-structure et à la sismique des ouvrages. Partie I* (directeur de thèse, co-encadrement : Guy Bonnet Prof. Université de Marne-la-Vallée)

- Gwendal Cumunel, 2004-2007 Thèse de doctorat ENPC, *Optimisation de l'emploi de capteurs pour l'évaluation dynamique et le contrôle des structures* (directeur de thèse, co-encadrement : Sylvie Lesoille Chercheur au LCPC)
- Frédéric Laudarin, 2004-2007 Thèse de doctorat UMLV, *Réduction de modèles en dynamique non linéaire de systèmes mécaniques couplés. Application à l'interaction sol-structure et à la sismique des ouvrages. Partie II* (directeur de thèse : Guy Bonnet Prof. Université de Marne-la-Vallée, co-encadrant)

#### **Participation active à la vie du Laboratoire**

- du 1<sup>er</sup> 11 1992 au 1<sup>er</sup> 11 1996 : responsable du séminaire scientifique et technique du Laboratoire L.M.S.G.C.
- de 1993 à 2000, nommé membre du Comité de Gestion du Laboratoire.
- membre du groupe de communication au sein du LCPC.
- membre du groupe de rédaction et correspondant de la lettre mensuelle d'information du LCPC : “*L*” comme *LCPC*.
- participation dans le cadre de l'élaboration du 3ème schéma directeur du LCPC, à la conférence-débat “Les technologies-clés de l'horizon 2005 - Questions à Jacques Serris”, Jeudi 1er Octobre 1998, Groupe des Industries Métallurgiques à Neuilly (rédaction d'un compte-rendu).
- membre du groupe miroir dans le cadre de l'élaboration du 3ème schéma directeur du LCPC (décembre 1998 - octobre 1999)
- participation au séminaire des 28 et 29 Mars 2000 “Mise en oeuvre du Schéma Directeur du LCPC”, LCPC - Centre de Nantes (rédaction d'un compte-rendu)
- intérim du directeur du LMSGC du 26 au 30 Juillet 1999,
- représentation du directeur du LMSGC (Réunion du Conseil de Pôle “Sciences de l'Ingénieur” 13/10/1999 LCPC Paris et 18/09/2000 LCPC Centre de Nantes)
- 18/06/2003 suivi de la formation *Le management des compétences de l'unité* organisée par le LCPC.

#### **Participation à la vie scientifique nationale et internationale - Distinction**

- de 1993 à 1995 programme bi-latéral d'échanges franco-allemand PROCOPE<sup>36</sup> avec l'Université Technique de Munich.  
financement (d'un montant d'environ 22 000 F/ an) pour faciliter les échanges et permettre les rencontres avec mes partenaires munichois.
- Participation au réseau de coopération scientifique et technique Européen dans le domaine du Génie parasismique (structures) ENESE (European Network for Earthquake Structural Engineering). Ce réseau est financé par l'Union Européenne (Human Capital and Mobility Programme - Networks), Jan. 1994 - Dec. 1995. - Total budget : 190,000 ECU (soit £156,000) - Coordinateur : G. Penelis (Greece) - Scientifiques présents : A. Kappos (Grèce), A. Elnashai (Angleterre), P. Argoul (en remplacement de P. Y. Bard) (France), M. Dolce (Italie), J. Bouwkamp (Allemagne).
- depuis 1994 nommé membre du groupe du travail sur le torsion EAEE Working Group par son président M. Victor Rutenberg Prof. à l'Institut de Technologie d'Haifa Israël.
- Suivi du cours IPSI “Problèmes inverses en mécanique des solides - Principes, Méthodes de résolution, Applications” - Paris du 17 au 19 Octobre 1995.
- Organisation et logistique du “Workshop Damage and Free Boundaries” dans le cadre du programme Free Boundary Problems (1993-1997) sponsorisé par l'European Science Foundation, 20-22 Mars 1996, à Moissac, France.
- président de la session “Wavelet transforms” à l'Euromech Colloquium 356 : Transform Methods in Solids Mechanics, 3-5 October 1996, München.
- Organisation et logistique de “IUTAM Symposium on Variations of Domains and Free-Boundary Problems in Solid Mechanics” (Paris Ecole des Mines, France, 22-25 Avril 1997).
- représentant français (french delegate) avec Fabrice Thouverez dans le COST F3 “Structural Dynamics” 1997-2001.
- responsable (task leader) du groupe de travail (Working Group) WG3 “Identification of Non linear Systems”. 1997-2001.
- membre du Comité d'évaluation des missions scientifiques de courte durée dans le cadre du COST F3 “Structural Dynamics” 1997-2001.

<sup>36</sup>PROCOPE est un programme de coopération scientifique entre la France et la R.F.A. Il fait partie d'une suite d'actions intégrées franco-allemandes conduites conjointement, par le Ministère des Affaires Etrangères et le Deutscher Akademischer AustauschDienst (DAAD). Le but de PROCOPE est de développer la coopération scientifique, technique et technologique entre les établissements d'enseignement supérieur et/ou les organismes publics de recherche des deux pays.

- président de la session technique (chairman of the technical session) “*Non-linearities*” de la conférence **ISMA 23** K.U. Leuven, le mercredi 17 septembre 1998.
- Montage d’un projet de recherches avec l’Université de Lattaquié en Syrie (Professeur Mahmoud Said) “Modélisation dynamique des bâtiments”.
- président de la session *COST Action Work in Progress* de : 2nd International Conference on Identification in Engineering Systems, University of Wales, Swansea, Royaume-Uni, 30 Mars 1999.
- organisation de la réunion COST Action F3 Structural Dynamics WG3 “Identification of non-linear systems”, LCPC Paris, 14 Juin 1999.
- membre du comité scientifique de l’European COST F3 Conference on System Identification & Structural Health Monitoring, 6-9 June, 2000, Universidad Politénica de Madrid, Espagne.
- membre du comité d’organisation du Second European Conference on Structural Control ENPC, Champs-sur-Marne, France, July 3-6, 2000.
- Participation à l’Action concertée incitative du Ministère de la Recherche ACI-CATNAT : “Prévention des catastrophes naturelles”. 2001-2003  
Thème : Interaction ‘site-ville’ et aléa sismique en milieu urbain (coordinateur du projet : P.Y. Bard, LCPC/Univ. Grenoble).
- membre du comité d’organisation des Journées Sciences de l’Ingénieur 2003 LCPC (Réseau des Laboratoires des Ponts et Chaussées) Villagium “le Normont” Dourdan Essonne.